Über die Lösung der Differentialgleichungen,

welche die Bewegung des dreiachsigen Kreisels um einen festen Punkt beschreiben.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Hohen Philosophischen Fakultät, II. Sektion,

der Kgl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität

zu München

vorgelegt am 10. Juli 1913

von

Arthur Rauber.

ACAD. LCGD. BAT. BIBL.

München 1913.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Inhalt.

Der **erste Teil** dieser Abhandlung beschäftigt sich mit der Lösung der Eulerschen Differentialgleichungen für den dreiachsigen festen Kreisel. S. 5—32.

Auf Grund eines fundamentalen Satzes von Poincaré wird die Lösung dargestellt durch dreifach unendliche Reihen nach Potenzen der Schwerpunktskoordinaten; die Koeffizienten dieser Reihen sind Funktionen der Zeit (t) und sie sind durch ein recurrierendes System von linearen Differentialgleichungen eindeutig definiert.

Die Lösungsreihen konvergieren für alle endliche Zeiten und genügen beliebig vorgeschriebenen Anfangsbedingungen. Der Variabilitätsbereich der Schwerpunktskoordinaten ist, nach der bisherigen Erkenntnis, abhängig von der Zeitdauer; er kann durch das Prinzip der analytischen Fortsetzung erweitert werden. Diese analytische Fortsetzung kann eine beliebige endliche Anzahl mal ausgeführt werden.

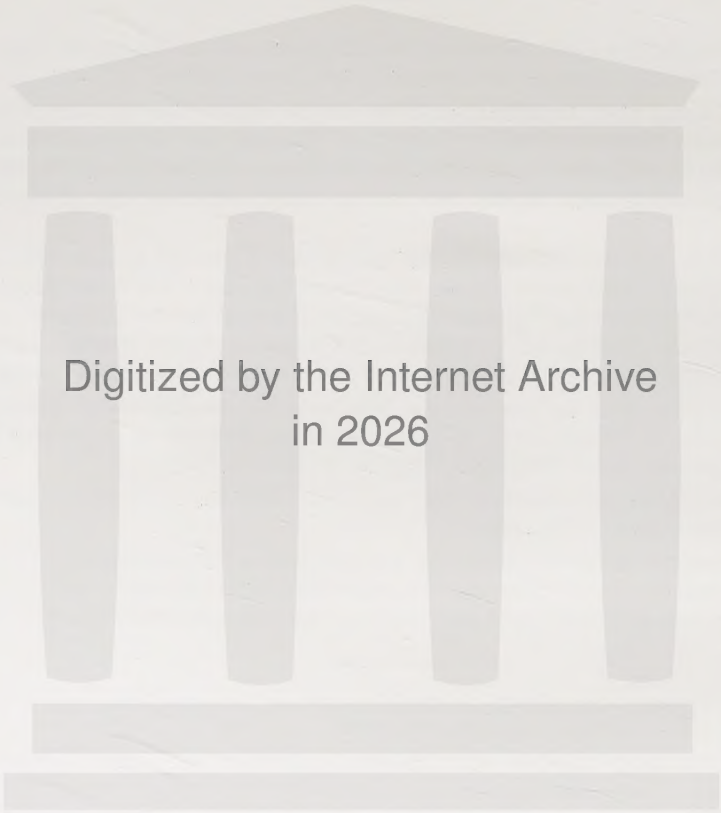
Es werden dann die Elemente zur Darstellung der Koeffizienten entwickelt; diese Funktionen können in einer prinzipiell einfachen Weise durch recurrierende Formeln aus elliptischen Funktionen aufgebaut werden. S. 7—25.

Eine Konvergenzbetrachtung dient dazu, den Gültigkeitsbereich der Lösungsreihen abzuschätzen. S. 25—32.

Im **zweiten Teile** der Abhandlung wird ein lineares Differentialsystem dritter Ordnung, das im ersten Teile eine wichtige Rolle spielt, untersucht und seine Lösung systematisch nach der Lehre von den Funktionen entwickelt. S. 33—53.

Die elliptischen Funktionen in dieser Arbeit sind nach der Definition Jacobis behandelt. Bei Umformungen wurde benützt:

Principales formules de la théorie des fonctions elliptiques. Gauthier-Villars, Paris 1900.
(Concours pour l'agrégations de mathématiques.)


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548303_0129

I. Teil.

Das Problem.

Ein starrer Körper, der an einem seiner Punkte festgehalten ist, für diesen Punkt ein dreiachsiges Trägheitsellipsoid besitzt und unter der Wirkung der Erdschwere sich bewegt, heiße ein dreiachsiger fester Kreisel. Die Bewegung eines solchen Kreisels wird nach Euler beschrieben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} T_1 \frac{dr_1}{dt} &= (T_2 - T_3)\, r_2 r_3 + M \cdot g\,(y_0 \gamma_3 - z_0 \gamma_2) \\ T_2 \frac{dr_2}{dt} &= (T_3 - T_1)\, r_3 r_1 + M \cdot g\,(z_0 \gamma_1 - x_0 \gamma_3) \\ T_3 \frac{dr_3}{dt} &= (T_1 - T_2)\, r_1 r_2 + M \cdot g\,(x_0 \gamma_2 - y_0 \gamma_1) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r_3 - \gamma_3 r_2; \quad \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r_3 - \alpha_3 r_2; \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r_3 - \beta_3 r_2 \\ &\frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 r_1 - \gamma_1 r_3; \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 r_1 - \alpha_1 r_3; \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 r_1 - \beta_1 r_3 \\ &\frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 r_2 - \gamma_2 r_1; \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 r_2 - \alpha_2 r_1; \quad \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 r_2 - \beta_2 r_1 \end{aligned} \tag{1a}$$

mit den Bedingungen:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \qquad \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 = 0$$

u. s. w. u. s. w.

Hier bedeuten: T_1, T_2, T_3 die Hauptträgheitsachsen des Körpers bezüglich des festen Punktes; sie bilden zugleich das körperfeste Achsenkreuz x, y, z. r_1, r_2, r_3 sind die Komponenten der Drehgeschwindigkeit im körperfesten System und es entsprechen sich: x, T_1, r_1; y, T_2, r_2; z, T_3, r_3. M ist die Masse des starren Körpers; g die Beschleunigung der Schwere, sie wirkt in der $-\zeta$-Achse eines raumfesten Achsenkreuzes. x_0, y_0, z_0 sind die Koordinaten des Schwer-

punktes. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind die trigonometrischen Cosinusse der Winkel, welche von den Achsen des körperfesten Systems x, y, z mit den Achsen des raumfesten Systems ξ, η, ζ gebildet werden. t bedeutet die Zeit.

Das Schema zeigt die Zuordnung der Systeme:

		x	y	z	Körperfest
Raumfest	ξ	α_1	α_2	α_3	
	η	β_1	β_2	β_3	
	ζ	γ_1	γ_2	γ_3	

Bekanntlich steht die Frage noch offen, in welcher Weise die Bewegungselemente r_1, r_2, r_3; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ u. s w. des dreiachsigen festen Kreisels in geschlossener Form durch bekannte Funktionen darzustellen sind. Nur unter besonderen Voraussetzungen über die Massenverteilung des starren Körpers oder über die Art der Bewegung ließen sich die Gleichungen (1) und (1^a) in diesem Sinne lösen.

Die Untersuchungen über die Sonderfälle sind in dem bekannten Werke: Klein und Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Bd. II, Seite 374ff. zusammengestellt.

Wenn wir den Versuch wagen, Funktionen zu erlangen, welche den Gleichungen (1) und (1^a) in einem gewissen Bereiche genügen, so veranlaßt uns dazu folgende Überlegung:

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen ist begründet auf der Darstellung der gesuchten Funktion durch Potenzreihen nach der unabhängigen Veriabelen; die Berechnung der Koeffizienten erfordert die sukzessive Auflösung von linearen algebraischen Gleichungen.

Geht man weiter zu Differentialgleichungen höheren Grades, so scheint es nützlich, wenn man die Lösung darstellt durch Reihen von höheren Funktionen der unabhängigen Variabelen, als die Potenzen es sind, und zwar von solchen Funktionen, welche durch lineare Differentialgleichungen definiert sind. Die Lösung kann z. B. dargestellt werden durch Potenzreihen in Parametern, deren Koeffizienten Funktionen der unabhängigen Variabelen sind und durch sukzessive Lösung von linearen Differentialgleichungen berechnet werden.

Auf diesem Wege werden wir versuchen, eine Lösung der Differentialgleichungen des dreiachsigen festen Kreisels zu gewinnen.

Die Berechnung der Größen r_1, r_2, r_3; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ u. s. w.

Wie oben erwähnt ist, sollen die gesuchten Größen dargestellt werden durch Reihen von Potenzen der Parameter mit Funktionen von t als Koeffizienten. Diese Entwicklung ist begründet durch den Satz von Poincaré über die Abhängigkeit der Lösungen eines Differentialsystemes von Parametern [vgl. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, tome I, (Paris 1892), p. 58; Picard, Traité d'analyse, tome III, (Paris 1908), p. 159; Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (Leipzig 1905), S. 298 ff.].

Für unsere Zwecke können wir den Satz von Poincaré so aussprechen:

Das Differentialsystem:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t;\ x_1, x_2, \ldots x_n, \sigma_1 \ldots \sigma_\nu);\ i = 1, 2, \ldots n \qquad (I)$$

mit den gegebenen Anfangswerten $x_i^{(0)} = \varphi_i(0)$
besitze für $\sigma_1 = 0;\ \sigma_2 = 0 \ldots \sigma_\nu = 0$ die für $0 \leqq t \leqq T$ stetige Lösung

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Dabei sei die unabhängige Variabele t auf reelle Werte beschränkt. Die Funktionen f_i seien für

$$0 \leqq t \leqq T;\quad |\xi_i| < r;\quad |\sigma_j| < r;\quad i = 1, 2 \ldots n;\ j = 1, 2 \ldots \nu$$

in Potenzreihen von

$$\xi_i = x_i - \varphi_i(t);\quad \sigma_j;\quad i = 1 \ldots n;\quad j = 1 \ldots \nu$$

entwickelbar, mit stetigen Funktionen von t als Koeffizienten, so daß die Gleichungen (I) die Form erhalten:

$$\frac{dx_i}{dt} = \underbrace{\sum_{0}^{\infty}}_{l_1 \ldots l_n} \underbrace{\sum_{0}^{\infty}}_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} \xi_1^{l_1} \xi_1^{l_2} \ldots \xi_n^{l_n} \sigma_1^{\lambda_1} \sigma_2^{\lambda_2} \ldots \sigma_\nu^{\lambda_\nu} A^{(i)}_{l_1 l_2 \ldots l_n \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu}(t) \qquad (II)$$

Der größte Wert der rechten Seiten im Konvergenzbereiche sei R. Dann lassen sich die Lösungen x_i des Systems (I) darstellen als Potenzreihen in $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_\nu$, die für

$$|\sigma_j| < \frac{r}{2\nu\left(1 + 2e^{\frac{nRT}{r}}\right)} \qquad j = 1, 2 \ldots \nu \qquad (III)$$

absolut konvergieren und stetige Funktionen von t (im Bereiche $0 \leqq t \leqq T$) zu Koeffizienten haben.

Dieser Satz von Poincaré ist, wie uns scheint, in erweiterter Form für die Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen von grundlegender Bedeutung.

Er kann unmittelbar für komplexe Werte von t ausgesprochen werden, sofern nur feststeht, daß die Funktionen $\varphi_i(t)$ und $A^{(i)}_{l_1 l_2 \ldots l_n \lambda_1 \lambda_2 \ldots \nu}(t)$ für $t = 0$ sich regulär verhalten und in einem Bereiche um diesen Punkt nur einzelne singuläre Stellen haben.

In unserer Anwendung des Satzes werden wir vorläufig nur reelle Werte von t zulassen; bei der Behandlung einzelner Teile, die in sich geschlossene Funktionen sind, werden wir uns natürlich des unbeschränkten komplexen Bereiches bedienen.

Wir wollen jetzt die Größen $r_1, r_2, r_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ berechnen. Sie sind definiert durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= \mu_1 r_2 r_3 + \frac{1}{T_1}(\sigma_2 \gamma_3 - \sigma_3 \gamma_2) & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2 r_3 - \gamma_3 r_2 \\ \frac{dr_2}{dt} &= \mu_2 r_3 r_1 + \frac{1}{T_2}(\sigma_3 \gamma_1 - \sigma_1 \gamma_3) & \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_3 r_1 - \gamma_1 r_3 \qquad (2) \text{ und } (2^a) \\ \frac{dr_3}{dt} &= \mu_3 r_1 r_2 + \frac{1}{T_3}(\sigma_1 \gamma_2 - \sigma_2 \gamma_1) & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_1 r_2 - \gamma_2 r_1 \end{aligned}$$

Dabei ist: $\mu_1 = \frac{T_2 - T_3}{T_1}$; $\mu_2 = \frac{T_3 - T_1}{T_2}$; $\mu_3 = \frac{T_1 - T_2}{T_3}$

und es besteht die Beziehung:

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \qquad (3)$$

Ferner bedeuten: $\sigma_1 = M \cdot g \cdot x_0$; $\sigma_2 = Mg\, y_0$; $\sigma_3 = M \cdot g \cdot z_0$.

Die Größen T, μ, σ sind ihrer mechanischen Bedeutung gemäß reell und es sei: $T_3 > T_2 > T_1 (> 0)$

also $$\mu_1 < 0; \quad \mu_2 > 0; \quad \mu_3 < 0 \qquad (4)$$

[Bemerkung: Zur Vereinfachung schreiben wir $\dot{r}$ für $\frac{dr}{dt}$, $\ddot{r}$ für $\frac{d^2 r}{dt^2}$ u. s. w.]

Für $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = 0$ lauten die Systeme (2) und (2^a):

$$\begin{aligned} \dot{R}_0^{(1)} &= \mu_1 R_0^{(2)} R_0^{(3)} & \dot{G}_0^{(1)} &= G_0^{(2)} R_0^{(3)} - G_0^{(3)} R_0^{(2)} \\ \dot{R}_0^{(2)} &= \mu_2 R_0^{(3)} R_0^{(1)} & \dot{G}_0^{(2)} &= G_0^{(3)} R_0^{(1)} - G_0^{(1)} R_0^{(3)} \qquad (5) \text{ und } (5^a) \\ \dot{R}_0^{(3)} &= \mu_3 R_0^{(1)} R_0^{(2)} & \dot{G}_0^{(3)} &= G_0^{(1)} R_0^{(2)} - G_0^{(2)} R_0^{(1)} \end{aligned}$$

Dies sind die bekannten Gleichungen des im Schwerpunkt festgehaltenen Kreisels.

Dem System (5) genügen die elliptischen Funktionen:

$$\mathbf{R}_0^{(1)} = \mathbf{P}_1 \,\mathbf{cn}\,(\mathbf{at}+\mathbf{b});\quad \mathbf{R}_0^{(2)} = \mathbf{P}_2 \,\mathbf{sn}\,(\mathbf{at}+\mathbf{b});\quad \mathbf{R}_0^{(3)} = \mathbf{P}_3 \,\mathbf{dn}\,(\mathbf{at}+\mathbf{b}) \tag{6}$$

Zwischen den 6 Konstanten P_1, P_2, P_3, a, b, k (= Modul der elliptischen Funktionen) bestehen die Beziehungen:

$$-P_1 a = \mu_1 P_2 P_3;\quad P_2 a = \mu_2 P_3 P_1;\quad -P_3 k^2 a = \mu_3 P_1 P_2$$

oder in anderer Form:

$$\frac{P_1^2}{\mu_1} = \frac{-P_2^2}{\mu_2} = \frac{P_3^2 k^2}{\mu_3};\quad -a^2 = \mu_1 \mu_2 P_3^2 \tag{7}$$

Diese Gleichungen bestimmen im Vereine mit den Anfangsbedingungen, für $t = 0$, bei gegebenen $R_0^{(i)}(0)$ die 6 Konstanten:

$$P_1^2 = \left[\frac{-\mu_1 R_0^{2(2)} + \mu_2 R_0^{2(1)}}{\mu_2}\right]_{t=0};\quad P_2^2 = \left[\frac{\mu_1 R_0^{2(2)} - \mu_2 R_0^{2(1)}}{\mu_1}\right]_{t=0};$$

$$P_3^2 = \left[\frac{-\mu_3 R_0^{2(2)} + \mu_2 R_0^{2(3)}}{\mu_2}\right]_{t=0}$$

$$a^2 = \mu_1 \left[\mu_3 R_0^{2(2)} - \mu_2 R_0^{2(3)}\right]_{t=0};\quad \mathrm{sn}^2(b) = \left[\frac{\mu_1 R_0^{2(2)}}{\mu_1 R_0^{2(2)} - \mu_2 R_0^{2(1)}}\right]_{t=0} \quad (<1)$$

$$k^2 = \left[\frac{\mu_3\left(\mu_1 R_0^{2(2)} - \mu_2 R_0^{2(1)}\right)}{\mu_1\left(\mu_3 R_0^{2(2)} - \mu_2 R_0^{2(3)}\right)}\right]_{t=0} \tag{8}$$

Die Anfangswerte $R_0^{(i)}(0)$ sind reell; darum sind mit Rücksicht auf Gl. (4) auch die Größen P_1, P_2, P_3, a, b, k reell.

Der Modul k muß <1 sein; diese Bedingung kann als erfüllt gelten; denn wenn sich in unserer Bezeichnung für gewisse Anfangswerte $R_0^{(i)}(0)$ ein $k^2 > 1$ ergibt, so setzen wir $R_0^{(1)} = P_1 (\mathrm{dn}\, at + b)$; $R_0^{(3)} = P_3 \,\mathrm{cn}\,(at + b)$; dann vertauschen sich die Indices 1 und 3, so daß $k < 1$ wird.

Das Differentialsystem (5[a]) ward bereits Gegenstand tiefgehender Untersuchungen und wir können seine allgemeine Lösung ebenfalls sofort angeben.

Vgl. z. B. neben den grundlegenden Arbeiten von Jakobi und Hermite besonders:

É. Picard, Sur les équations linéaires à coefficients doublement periodiques. Crelle's Journal, Bd. 90, Seite 291 ff.

F. Lindemann, Über die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt. Sitz.-Ber. d. math.-physik. Klasse d. k. b. Akademie der Wissenschaften. 1898, Seite 184 ff.

L. Sauvage, Théorie générale des systemes d'équations differentielles linéaires et homogènes (Paris 1895) p. 136.

Also, wir definieren die Größen ω und Ω durch die Gleichungen

$$\operatorname{sn}^2(i\omega) = \frac{-T_1(T_2 - T_3)}{T_3(T_1 - T_2)}$$

$$\Omega = \frac{\dot{\Theta}(i\omega)}{\Theta(i\omega)} + i P_3 \operatorname{dn}(i\omega) \tag{9}$$

setzen

$$\psi_{11} = i\frac{k}{k'} \operatorname{cn}(i\omega + K) \operatorname{cn}(at + b)$$

$$\psi_{12} + i\psi_{13} = \frac{\Theta(at + b - i\omega)}{\Theta(at + b)} \frac{\Theta_1(0)}{\Theta_1(i\omega)} e^{\Omega(at+b)}$$

$$\psi_{12} - i\psi_{13} = \frac{\Theta(at + b + i\omega)}{\Theta(at + b)} \frac{\Theta_1(0)}{\Theta_1(i\omega)} e^{-\Omega(at+b)}$$

$$\psi_{21} = k \operatorname{sn}(i\omega + K) \operatorname{sn}(at + b) \tag{10}$$

$$\psi_{22} \pm i\psi_{23} = \pm i \frac{\Theta_1(at + b \mp i\omega)}{\Theta(at + b)} \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(i\omega)} e^{\pm\Omega(at+b)}$$

$$\psi_{31} = \frac{1}{k'} \operatorname{dn}(i\omega + K) \operatorname{dn}(at + b)$$

$$\psi_{32} \pm i\psi_{33} = \mp i \frac{H(at + b \mp i\omega)}{H(at + b)} \frac{H_1(0)}{\Theta_1(i\omega)} e^{\pm\Omega(at+b)}$$

$$\left(k'^2 = 1 - k^2; \quad K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}; \right.$$

$$\left. K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2 z^2)}} \right)$$

und erhalten eine allgemeine Lösung der Gleichungen (5[a]) in der Form:

$$\begin{aligned} G_0^{(1)} &= \Gamma_1 \psi_{11} + \Gamma_2 \psi_{12} + \Gamma_3 \psi_{13} \\ G_0^{(2)} &= \Gamma_1 \psi_{21} + \Gamma_2 \psi_{22} + \Gamma_3 \psi_{23} \\ G_0^{(3)} &= \Gamma_1 \psi_{31} + \Gamma_2 \psi_{32} + \Gamma_3 \psi_{33} \end{aligned} \tag{11}$$

Die Konstanten Γ sind durch die Anfangswerte $\left[G_0^{(i)}\right]_{t=0}$ bestimmt.

Als singuläre Stellen besitzen die Funktionen $R_0^{(i)}$, $G_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ nur einfache Pole für die Argumente $at + b = iK' + 2mK + 2m'iK'$; sie sind also für alle reellen Werte von t endlich und stetig.

Poincarés Satz stellt, wenn wir ihn nunmehr anwenden wollen, die Bedingung, daß die rechten Seiten der Differentialsysteme (2) und (2^a) in konvergente neunfache Potenzreihen der Größen $r_i - R_0^{(i)}$, $\gamma_i - G_0^{(i)}$, σ_i $(i = 1, 2, 3)$ in einem gewissen Bereiche entwickelt werden können. Diese Reihen lassen sich ohne Mühe angeben, denn es ist identisch:

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \mu_1 (r_2 - R_0^{(2)} + R_0^{(2)})(r_3 - R_0^{(3)} + R_0^{(3)}) \\ &\quad + \frac{1}{T_1}\left[\sigma_2 (\gamma_3 - G_0^{(3)} + G_0^{(3)}) - \sigma_3 (\gamma_2 - G_0^{(2)} + G_0^{(2)})\right] \\ &= \mu_1 R_0^{(2)} R_0^{(3)} + \mu_1 R_0^{(3)} (r_2 - R_0^{(2)}) + \mu_1 R_0^{(2)} (r_3 - R_0^{(3)}) \\ &\quad + \frac{1}{T_1} G_0^{(3)} \sigma_2 - \frac{1}{T_1} G_0^{(2)} \sigma_3 \\ &\quad + \mu_1 (r_2 - R_0^{(2)})(r_3 - R_0^{(3)}) + \frac{1}{T_1}\sigma_2 (\gamma_3 - G_0^{(3)}) - \frac{1}{T_1}\sigma_3 (\gamma_2 - G_0^{(2)}) \\ \dot{r}_2 &= \ldots \quad \text{analog} \\ \dot{r}_3 &= \ldots \\ \dot{\gamma}_1 &= (\gamma_2 - G_0^{(2)} + G_0^{(2)})(r_3 - R_0^{(3)} + R_0^{(3)}) - (\gamma_3 - G_0^{(3)} + G_0^{(3)}) \\ &\qquad (r_2 - R_0^{(2)} + R_0^{(2)}) \\ &= G_0^{(2)} R_0^{(3)} - G_0^{(3)} R_0^{(2)} + G_0^{(2)} (r_3 - R_0^{(3)}) + G_0^{(3)} (r_2 - R_0^{(2)}) \\ &\qquad + R_0^{(3)} (\gamma_2 - G_0^{(2)}) - R_0^{(2)} (\gamma_3 - G_0^{(3)}) \\ &\qquad + (\gamma_2 - G_0^{(2)})(r_3 - R_0^{(3)}) - (\gamma_3 - G_0^{(3)})(r_2 - R_0^{(2)}) \\ \dot{\gamma}_2 &= \ldots \quad \text{analog} \\ \dot{\gamma}_3 &= \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

Man sieht, daß nur die konstanten, sowie ein Teil der linearen und quadratischen Glieder auftreten: die unendlichen Reihen vereinfachen sich hier zu Polynomen. Diese sind für alle endlichen Werte der Variabeln $(r_i - R_0^{(i)})$, $(\gamma_i - G_0^{(i)})$, σ_i $(i = 1, 2, 3)$ selbst end-

lich und stetig; die Koeffizienten sind, wie wir wissen, für alle reellen t stetige Funktionen.

Wir gelangen so zu dem Ergebnis, daß:

in unserem Falle die Reihen (II) des Poincaréschen Satzes konvergieren, wenn wir den Größen r und T beliebige, aber endliche, reelle Werte geben; der größte Wert der rechten Seiten, R, ist hier = const. r^2, also selbst eine beliebig große aber endliche Zahl.

Unter diesen Umständen wird auch die Größe

$$\frac{r}{2 \cdot 3\left(1 + 2\,e^{\frac{6RT}{r}}\right)}$$

für alle endlichen t selbst endlich und von Null verschieden bleiben und gestützt auf den Satz von Poincaré machen wir den Schluß:

Die Differentialsysteme (2) und (2ª) können gelöst werden durch Funktionen der Form:

$$r_i = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n\ \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R^{(i)}_{l\,m\,n}$$

$$\gamma_i = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n\ \sigma_1^l \sigma_2^n \sigma_3^n G^{(i)}_{l\,m\,n} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wobei $R^{(i)}_{l\,m\,n}$ und $G^{(i)}_{l\,m\,n}$ stetige Funktionen von t sind.

Diese Funktionen r_i und γ_i sind für alle endlichen reellen t sowie für die Parameter σ_1, σ_2, σ_3 in einem gewissen Bereiche, der von abhängt, absolut konvergent.

Wir besitzen damit für r_i und γ_i Funktionselemente in einem gewissen Bereiche um den Nullpunkt der Veränderlichen t, σ_1, σ_2, σ_3. Punkte außerhalb dieser Bereiche erreichen wir durch das Prinzip der analytischen Fortsetzung.

Die Fortsetzung in t ist notwendig, wenn die σ_i aus irgend welchen, vielleicht praktischen, Gründen eine untere Grenze nicht unterschreiten dürfen. Wir betrachten dann den Zustand zurzeit $t = t_0$, den wir berechnet haben, als neuen Anfangszustand, berechnen von neuem die Konstanten a, b, P_1 u. s. w. und insbesondere den Modul k der elliptischen Funktionen und erhalten dann die neuen Werte von r_i und γ_i, nämlich

$$r_i = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R'^{(i)}_{l\,m\,n}$$

$$\gamma_i = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n G'^{(i)}_{l\,m\,n} \qquad i = 1, 2, 3$$

Um die Fortsetzung in σ_i auszuführen, verfahren wir so:

Angenommen, wir kennen r_i und γ_i für $\sigma_i = \sigma_{i(0)}$; sie sind gemäß ihrer mechanisch-geometrischen Bedeutung als Komponenten der Drehgeschwindigkeit und als trigonometrische Kosinusse von Winkeln endliche und stetige Funktionen von t. Nun setzen wir:

$$\sigma_i = \sigma'_i + \sigma_{i\,(0)} \qquad i = 1, 2, 3$$

in die Differentialgleichungen (2) ein. Diese erfüllen für $\sigma'_i = 0$ wiederum die Bedingungen des Poincaréschen Satzes und wir können r_i und γ_i für $|\sigma_i'| > 0$ berechnen. Auf diese Weise läßt sich die analytische Fortsetzung eine endliche Anzahl mal aber doch beliebig oft ausführen.

Die Berechnung der Funktionen $R^{(i)}_{l,\,m,\,n}$, $G^{(i)}_{l,\,m,\,n}$.

Nachdem wir uns überzeugt haben, daß die Differentialsysteme (2) und (2ª) durch analytische Funktionen gelöst werden können, beginnen wir damit, diese darzustellen.

Es ist das folgende System zu betrachten:

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= \mu_1 r_2 r_3 + \frac{1}{T_1}(\sigma_2 \gamma_3 - \sigma_3 \gamma_2) & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 r_3 - \gamma_3 r_2 \\
\dot{r}_2 &= \mu_2 r_3 r_1 + \frac{1}{T_2}(\sigma_3 \gamma_1 - \sigma_1 \gamma_3) & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 r_1 - \gamma_1 r_3 \qquad (2) \text{ und } (2^a) \\
\dot{r}_3 &= \mu_3 r_1 r_2 + \frac{1}{T_3}(\sigma_1 \gamma_2 - \sigma_2 \gamma_1) & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 r_2 - \gamma_2 r_1
\end{aligned}$$

Die Lösungen haben die Form:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R^{(1)}_{l\,m\,n} \\
r_2 &= \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R^{(2)}_{l\,m\,n} \qquad (13) \\
r_3 &= \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R^{(3)}_{l\,m\,n}
\end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^{\,l}\, \sigma_2^{\,m}\, \sigma_3^{\,n}\, G^{(1)}_{l\,m\,n}$$

$$\gamma_2 = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^{\,l}\, \sigma_2^{\,m}\, \sigma_3^{\,n}\, G^{(2)}_{l\,m\,n} \qquad (13^a)$$

$$\gamma_3 = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^{\,l}\, \sigma_2^{\,m}\, \sigma_3^{\,n}\, G^{(3)}_{l\,m\,n}$$

Diese Reihen werden in die Differentialgleichungen eingesetzt und die Koeffizienten gleichhoher Potenzen von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ einander gegenübergestellt. Wir erhalten so eine unendliche Folge von je $3+3$ Differentialgleichungen, denen die Funktionen $R^{(i)}_{l\,m\,n}$, $G^{(i)}_{l\,m\,n}$ genügen müssen. Nämlich:

$$\begin{aligned}
\dot R^{(1)}_{000} &= \mu_1 R^{(2)}_{000} R^{(3)}_{000} & \dot G^{(1)}_{000} &= G^{(2)}_{000} R^{(3)}_{000} - G^{(3)}_{000} R^{(2)}_{000} \\
\dot R^{(2)}_{000} &= \mu_2 R^{(3)}_{000} R^{(1)}_{000} & \dot G^{(2)}_{000} &= G^{(3)}_{000} R^{(1)}_{000} - G^{(1)}_{000} R^{(3)}_{000} \qquad (14) \text{ und } (14^a) \\
\dot R^{(3)}_{000} &= \mu_3 R^{(3)}_{000} R^{(2)}_{000} & \dot G^{(3)}_{000} &= G^{(1)}_{000} R^{(2)}_{000} - G^{(2)}_{000} R^{(1)}_{000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot R^{(1)}_{100} &= \mu_1 \left[R^{(2)}_{100} R^{(3)}_{000} + R^{(3)}_{100} R^{(2)}_{000}\right] \\
\dot R^{(2)}_{100} &= \mu_2 \left[R^{(3)}_{100} R^{(1)}_{000} + R^{(1)}_{100} R^{(3)}_{000}\right] - \frac{1}{T_2} G^{(3)}_{000} \qquad (15) \\
\dot R^{(3)}_{100} &= \mu_3 \left[R^{(1)}_{100} R^{(2)}_{000} + R^{(2)}_{100} R^{(1)}_{000}\right] + \frac{1}{T_3} G^{(2)}_{000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot G^{(1)}_{100} &= G^{(2)}_{100} R^{(3)}_{000} - G^{(3)}_{100} R^{(2)}_{100} + G^{(2)}_{000} R^{(3)}_{100} - G^{(3)}_{000} R^{(2)}_{100} \\
\dot G^{(2)}_{100} &= G^{(3)}_{100} R^{(1)}_{000} - G^{(1)}_{100} R^{(3)}_{000} + G^{(3)}_{000} R^{(1)}_{100} - G^{(1)}_{000} R^{(3)}_{100} \qquad (15^a) \\
\dot G^{(3)}_{100} &= G^{(1)}_{100} R^{(2)}_{000} - G^{(2)}_{100} R^{(1)}_{000} + G^{(1)}_{000} R^{(2)}_{100} - G^{(2)}_{000} R^{(1)}_{100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot R^{(1)}_{010} &= \mu_1 \left[R^{(2)}_{010} R^{(3)}_{000} + R^{(3)}_{010} R^{(2)}_{000}\right] + \frac{1}{T_1} G^{(5)}_{000} \\
\dot R^{(2)}_{010} &= \mu_2 \left[R^{(3)}_{010} R^{(1)}_{000} + R^{(1)}_{010} R^{(3)}_{000}\right] \qquad (16) \\
\dot R^{(3)}_{010} &= \mu_3 \left[R^{(1)}_{010} R^{(2)}_{000} + R^{(2)}_{010} R^{(1)}_{000}\right] - \frac{1}{T_3} G^{(1)}_{000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot G^{(1)}_{010} &= G^{(2)}_{010} R^{(3)}_{000} - G^{(3)}_{010} R^{(2)}_{010} + G^{(2)}_{000} R^{(3)}_{010} - G^{(3)}_{000} R^{(2)}_{010} \\
\dot G^{(2)}_{010} &= G^{(3)}_{010} R^{(1)}_{000} - G^{(1)}_{010} R^{(3)}_{000} + G^{(3)}_{000} R^{(1)}_{010} - G^{(1)}_{000} R^{(3)}_{010} \qquad (16^a) \\
\dot G^{(3)}_{010} &= G^{(1)}_{010} R^{(2)}_{000} - G^{(2)}_{010} R^{(1)}_{000} + G^{(1)}_{000} R^{(2)}_{010} - G^{(2)}_{000} R^{(1)}_{010}
\end{aligned}$$

$$\dot{R}^{(1)}_{001} = \mu_1 \left[R^{(2)}_{001} R^{(3)}_{000} + R^{(3)}_{001} R^{(2)}_{000}\right] - \frac{1}{T_1} G^{(2)}_{000}$$

$$\dot{R}^{(2)}_{001} = \mu_2 \left[R^{(3)}_{001} R^{(1)}_{000} + R^{(1)}_{001} R^{(3)}_{000}\right] + \frac{1}{T_2} G^{(1)}_{000} \qquad (17)$$

$$\dot{R}^{(3)}_{001} = \mu_3 \left[R^{(1)}_{001} R^{(2)}_{000} + R^{(2)}_{001} R^{(1)}_{000}\right]$$

$$\dot{G}^{(1)}_{001} = G^{(2)}_{001} R^{(3)}_{000} - G^{(3)}_{001} R^{(2)}_{000} + G^{(2)}_{000} R^{(3)}_{001} - G^{(3)}_{000} R^{(2)}_{001}$$

$$\dot{G}^{(2)}_{001} = G^{(3)}_{001} R^{(1)}_{000} - G^{(1)}_{001} R^{(3)}_{000} + G^{(3)}_{000} R^{(1)}_{001} - G^{(1)}_{000} R^{(3)}_{001} \qquad (17^{a})$$

$$\dot{G}^{(3)}_{001} = G^{(1)}_{001} R^{(2)}_{000} - G^{(2)}_{001} R^{(1)}_{000} + G^{(1)}_{000} R^{(2)}_{001} - G^{(2)}_{000} R^{(1)}_{000}$$

Die Koeffizienten des allgemeinen Gliedes $\sigma_1^{\,l}$, $\sigma_2^{\,m}$, $\sigma_3^{\,n}$ sind definiert durch die Systeme:

$$\dot{R}^{(1)}_{l\,m\,n} = \mu_1 \left[R^{(2)}_{l\,m\,n} R^{(3)}_{l\,m\,n} + R^{(3)}_{l\,m\,n} R^{(2)}_{000}\right]$$

$$+ \mu_1 \begin{bmatrix} R^{(2)}_{l-1,\,m,\,n} R^{(3)}_{100} + R^{(2)}_{l-2,\,m,\,n} R^{(3)}_{200} + \ldots + R^{(2)}_{0,\,m,\,n} R^{(3)}_{l,\,00} \\ + R^{(2)}_{l,\,m-1,\,n} R^{(3)}_{0,\,1,\,0} + R^{(2)}_{l,\,m-2,\,n} R^{(3)}_{0,\,2,\,0} + \ldots + R^{(2)}_{l,\,0,\,n} R^{(3)}_{0,\,m,\,0} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + R^{(2)}_{0,\,0,\,n} R^{(3)}_{l,\,m,\,0} + R^{(2)}_{0,\,0,\,n-1} R^{(3)}_{l,\,m,\,1} + \ldots + R^{(2)}_{0,\,0,\,1} R^{(3)}_{l,\,m,\,n-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{T_1} \left[G^{(3)}_{l,\,m-1,\,n} - G^{(2)}_{l,\,m,\,n-1}\right]$$

$$\dot{R}^{(2)}_{l\,m\,n} = \mu_2 \left[R^{(3)}_{l\,m\,n} R^{(1)}_{000} + R^{(1)}_{l\,m\,n} R^{(3)}_{000}\right]$$

$$+ \mu_2 \begin{bmatrix} R^{(3)}_{l-1,\,m,\,n} R^{(1)}_{100} + \ldots\ldots + R^{(3)}_{0,\,m,\,n} R^{(1)}_{l,\,0,\,0} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + R^{(3)}_{0,\,0,\,n} R^{(1)}_{l,\,m,\,0} + \ldots\ldots + R^{(3)}_{0,\,0,\,1} R^{(1)}_{l,\,m,\,n-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{T_2} \left[G^{(1)}_{l,\,m,\,n-1} - G^{(3)}_{l-1,\,m,\,n}\right]$$

$$\dot{R}^{(3)}_{l\,m\,n} = \mu_3 \left[R^{(1)}_{l\,m\,n} R^{(2)}_{000} + R^{(2)}_{l\,m\,n} R^{(1)}_{000}\right] \qquad (18)$$

$$\mu_3 \begin{bmatrix} R^{(1)}_{l-1,\,m,\,n} R^{(2)}_{100} + \ldots\ldots + R^{(1)}_{0,\,m,\,n} R^{(2)}_{l,\,0,\,0} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + R^{(1)}_{0,\,0,\,n} R^{(2)}_{l,\,m,\,0} + \ldots\ldots + R^{(3)}_{0,\,0,\,1} R^{(1)}_{l,\,m,\,n-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{T_3} \left[G^{(2)}_{l-1,\,m,\,n} - G^{(1)}_{l,\,m-1,\,n}\right]$$

$$
\begin{aligned}
\dot{G}^{(1)}_{l\,m\,n} &= G^{(2)}_{l\,m\,n} R^{(3)}_{000} - G^{(3)}_{l\,m\,n} R^{(2)}_{000} \\
&+ G^{(2)}_{l-1,\,m,\,n} R^{(3)}_{100} + \ldots\ldots + G^{(2)}_{0,\,m,\,n} R^{(3)}_{l,\,00} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ G^{(2)}_{0,\,0,\,n} R^{(3)}_{l,\,n,\,0} + \ldots\ldots + G^{(2)}_{0,\,0,\,1} R^{(3)}_{l,\,m,\,n-1} \\
&- G^{(3)}_{l-1,\,m,\,n} R^{(2)}_{100} - \ldots\ldots - G^{(3)}_{0,\,m,\,n} R^{(2)}_{l,\,0,\,0} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- G^{(3)}_{0,\,0,\,n} R^{(2)}_{l,\,m,\,0} - \ldots\ldots - G^{(3)}_{0,01} R^{(2)}_{l,\,m,\,n-1} \qquad (18^a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{G}^{(2)}_{l\,m\,n} &= G^{(3)}_{l\,m\,n} R^{(1)}_{000} - G^{(1)}_{l\,m\,n} R^{(3)}_{000} \\
&+ G^{(3)}_{l-1,\,m,\,n} R^{(1)}_{1,00} + \ldots\ldots + G^{(3)}_{0,01} R^{(1)}_{l,\,m,\,n-1} \\
&- G^{(1)}_{l-1,\,m,\,n} R^{(3)}_{100} - \ldots\ldots - G^{(1)}_{001} R^{(3)}_{l,\,m,\,n-1} \\
\dot{G}^{(3)}_{l\,m\,n} &= G^{(1)}_{l\,m\,n} R^{(2)}_{000} - G^{(2)}_{l\,m\,n} R^{(1)}_{000} \\
&+ G^{(1)}_{l-1,\,m,\,n} R^{(2)}_{100} + \ldots\ldots + G^{(1)}_{0,01} R^{(2)}_{l,\,m,\,n-1} \\
&- G^{(2)}_{l-1,\,m,\,n} R^{(1)}_{100} - \ldots\ldots - G^{(2)}_{001} R^{(1)}_{l,\,m,\,n-1}
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (14) und (14ª) sind natürlich mit (5) und (5ª) identisch. Alle nachfolgenden Systeme (15) bis (18) haben die gemeinsame Form:

$$
\begin{aligned}
\dot{R}^{(1)}_{l\,m\,n} &= \mu_1 \left[R^{(2)}_{l\,m\,n} R^{(3)}_{000} + R^{(3)}_{l\,m\,n} R^{(2)}_{000} \right] + \mathfrak{R}^{(1)}_{l\,m\,n} \\
\dot{R}^{(2)}_{l\,m\,n} &= \mu_2 \left[R^{(3)}_{l\,m\,n} R^{(1)}_{000} + R^{(1)}_{l\,m\,n} R^{(3)}_{000} \right] + \mathfrak{R}^{(2)}_{l\,m\,n} \qquad (19) \\
\dot{R}^{(3)}_{l\,m\,n} &= \mu_3 \left[R^{(1)}_{l\,m\,n} R^{(2)}_{000} + R^{(2)}_{l\,m\,n} R^{(1)}_{000} \right] + \mathfrak{R}^{(3)}_{l\,m\,n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{G}^{(1)}_{l\,m\,n} &= G^{(2)}_{l\,m\,n} G^{(3)}_{000} - G^{(3)}_{l\,m\,n} G^{(2)}_{000} + \mathfrak{G}^{(1)}_{l\,m\,n} \\
\dot{G}^{(2)}_{l\,m\,n} &= G^{(3)}_{l\,m\,n} G^{(1)}_{000} - G^{(1)}_{l\,m\,n} G^{(3)}_{000} + \mathfrak{G}^{(2)}_{l\,m\,n} \qquad (19^a) \\
\dot{G}^{(3)}_{l\,m\,n} &= G^{(1)}_{l\,m\,n} G^{(2)}_{000} - G^{(2)}_{l\,m\,n} G^{(1)}_{000} + \mathfrak{G}^{(3)}_{l\,m\,n}
\end{aligned}
$$

wobei die $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ aus bekannten R- und G-Funktionen gebildet sind. Um die Lösung dieser Differentialsysteme berechnen zu können, bedürfen wir je eines Fundamentalsystemes von Lösungen der homogenen Gleichungen.

Die Untersuchung des homogenen Systemes (19) bildet den Gegenstand des zweiten Teiles dieser Arbeit.

Wir benutzen jene Ergebnisse und setzen:

$$
\begin{aligned}
R_{I}^{(1)} &= \rho_1 \,\mathrm{sn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau);\\
R_{II}^{(1)} &= \rho_1 \left[\mathrm{sn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)\left(\delta_2\tau + Z(\tau - K)\right) + \frac{k'^2}{\mathrm{cn}(\tau)}\right]\\
R_{III}^{(1)} &= \rho_1 \,\mathrm{sn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)\left(\delta_3\tau + Z(\tau - K - iK')\right)\\
R_{I}^{(2)} &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)\\
R_{II}^{(2)} &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)\left(\delta_2\tau + Z(\tau - K)\right)\\
R_{III}^{(2)} &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)\left(\delta_3\tau + Z(\tau - K - iK')\right) \qquad (20)\\
R_{I}^{(3)} &= \rho_3 \,\mathrm{sn}(\tau)\,\mathrm{cn}(\tau)\\
R_{II}^{(3)} &= \rho_3 \,\mathrm{sn}(\tau)\,\mathrm{cn}(\tau)\left(\delta_2\tau + Z(\tau - K)\right)\\
R_{III}^{(3)} &= \rho_3 \left[\mathrm{sn}(\tau)\,\mathrm{cn}(\tau)\left(\delta_3\tau + Z(\tau - K - iK')\right) - \frac{k'^2 \cdot 1}{k^2\,\mathrm{dn}(\tau)}\right]
\end{aligned}
$$

wobei $\tau = at + b$; $\delta_2 = \dfrac{2k^2 - 1}{3} - 2\dfrac{N_3}{N_1}$; $\rho_1 = -i\sqrt{\dfrac{\mu_1}{\mu_2}}$

$$\delta_3 = \frac{2 - k^2}{3} - 2\frac{N_3}{N_1};\quad \rho_3 = -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}$$

$$Z(\tau) = \frac{d}{d\tau}\ln H(\tau);\quad N_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\tau^i} H(\tau)\right]_{\tau = 0}$$

dann erhalten wir ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gl. (19), d. h. der Gleichungen, in denen die Funktionen $\mathfrak{R}_{lmn}$ und $\mathfrak{G}_{lmn}$ durch Null ersetzt sind, in der Form:

$$\mathbf{R}^{(i)} = r_1 \mathbf{R}_{I}^{(i)} + r_2 \mathbf{R}_{II}^{(i)} + r_3 \mathbf{R}_{III}^{(i)} \qquad i = 1, 2, 3. \qquad (21)$$

In den weiteren Untersuchungen wird die Determinante des Fundamentalsystemes eine Rolle spielen; wir finden:

$$\Delta_R = \begin{vmatrix} R_{I}^{(1)} & \cdot & R_{III}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{I}^{(3)} & \cdot & R_{III}^{(3)} \end{vmatrix} = -k\,\frac{\sqrt{\mu_1 \mu_3}}{\mu_2}\,\frac{(1 - k^2)^2}{k^2} \qquad (22)$$

Δ_R ist also unabhängig von t; dieser Umstand ist von Bedeutung. Dagegen ist die Determinante abhängig außer von den Verhältnissen der Hauptträgheitsachsen des Kreisels auch von den Anfangsbedingungen; dieser Umstand ist nicht wesentlich wichtig, denn indem wir das Fundamentalsystem mit Konstanten multiplizieren, können wir seiner Determinante jeden beliebigen konstanten Wert geben.

Doch wollen wir uns dessen erinnern, daß wir in diesen Betrachtungen den allgemeinen elliptischen Fall der Kreiselbewegung voraussetzen, d. h.

$$\mathbf{0 < k < 1}.$$

Den Grenzfällen $k = 0$ und $k = 1$ werden wir später einige besondere Betrachtungen widmen; die elliptischen Funktionen gehen dabei in trigonometrische über.

In diesen Grenzfällen sind für besondere Werte der Parameter $\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3$ auch diejenigen Fälle des Kreisels enthalten, welche eine Lösung in geschlossener Form zulassen, z. B. der Kowalewska'sche Fall, der durch hyperelliptische Funktionen beschrieben wird. Es bleibt zu untersuchen, in welcher Weise unsere Funktionen in jene übergehen.

Eine allgemeine Lösung des homogenen Systemes (19ª) haben wir bereits in Gl. (10) angegeben. Wir wollen dem Fundamentalsystem eine andere Gestalt geben, die für unsere weiteren Rechnungen einfacher ist.

Es sei:

$$\begin{aligned}
G_{\mathrm{I}}^{(1)} &= i\,\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,(i\omega + K)\,\mathrm{cn}\,(\tau)\\
G_{\mathrm{II}}^{(1)} &= \frac{\Theta(\tau - i\omega)\,\Theta_1(0)}{\Theta(\tau)\,\Theta_1(i\omega)}\,e^{\Omega\tau}\\
G_{\mathrm{III}}^{(1)} &= \frac{\Theta(\tau + i\omega)\,\Theta_1(0)}{\Theta(\tau)\,\Theta_1(i\omega)}\,e^{-\Omega\tau}\\
G_{\mathrm{I}}^{(2)} &= k\,\mathrm{sn}\,(i\omega + K)\,\mathrm{sn}\,(\tau)\\
G_{\mathrm{II}}^{(2)} &= i\,\frac{\Theta_1(\tau - i\omega)\,\Theta(0)}{\Theta(\tau)\,\Theta_1(i\omega)}\,e^{\Omega\tau}\\
G_{\mathrm{III}}^{(2)} &= -i\,\frac{\Theta_1(\tau + i\omega)\,\Theta(0)}{\Theta(\tau)\,\Theta_1(i\omega)}\,e^{-\Omega\tau}\\
G_{\mathrm{I}}^{(3)} &= \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,(i\omega + K)\,\mathrm{dn}\,(\tau)\\
G_{\mathrm{II}}^{(3)} &= -i\,\frac{H(\tau - i\omega)\,H_1(0)}{\Theta(\tau)\,\Theta_1(i\omega)}\,e^{\Omega\tau}\\
G_{\mathrm{III}}^{(3)} &= i\,\frac{H(\tau + i\omega)\,H_1(0)}{\Theta(\tau)\,\Theta_1(i\omega)}\,e^{-\Omega\tau}
\end{aligned} \qquad (23)$$

Die Gl. (11) lauten dann:

$$G_{(i)} = \Gamma_1\, G_{\mathrm{I}}^{(i)} + \frac{\Gamma_2 + \Gamma_3}{2}\, G_{\mathrm{II}}^{(i)} + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_3}{-2i}\, G_{\mathrm{III}}^{(i)} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Wir brauchen nur nacheinander zu setzen:

$$\Gamma_1 = 1,\ \Gamma_2 = 0,\ \Gamma_3 = 0;\ \Gamma_1 = 0,\ \Gamma_2 + \Gamma_3 = 2,\ \Gamma_2 - \Gamma_3 = 0;$$
$$\Gamma_1 = 0,\ \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0,\ \Gamma_3 - \Gamma_2 = 2\,i$$

um das neue Fundamentalsystem zu erhalten:

$$\mathfrak{G}^{(i)} = \mathfrak{g}_1 \mathfrak{G}_{\mathrm{I}}^{(i)} + \mathfrak{g}_2 \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}^{(i)} + \mathfrak{g}_3 \mathfrak{G}_{\mathrm{III}}^{(i)} \qquad i = 1, 2, 3. \tag{24}$$

Wir bedürfen auch der Determinante dieses Fundamentalsystems und finden:

$$\Delta_{\mathfrak{G}} = \begin{vmatrix} \mathfrak{G}_{\mathrm{I}}^{(1)} & \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}^{(1)} & \mathfrak{G}_{\mathrm{III}}^{(1)} \\ \mathfrak{G}_{\mathrm{I}}^{(2)} & \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}^{(2)} & \mathfrak{G}_{\mathrm{III}}^{(2)} \\ \mathfrak{G}_{\mathrm{I}}^{(3)} & \mathfrak{G}_{\mathrm{II}}^{(3)} & \mathfrak{G}_{\mathrm{III}}^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Theta(\tau + i\omega)\,\Theta(\tau - i\omega)\,\Theta_1^{\,2}(0)}{\Theta^2(\tau)\,\Theta_1^{\,2}(i\omega)} \times \tag{25}$$

$$\left[\begin{array}{l} -i\dfrac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{cn}(i\omega + K)\,\mathrm{cn}(\tau)\begin{pmatrix} \mathrm{dn}(\tau - i\omega)\,\mathrm{sn}(\tau + i\omega) \\ -\mathrm{dn}(\tau + i\omega)\,\mathrm{sn}(\tau - i\omega) \end{pmatrix} \\ -i\,k^2\ \mathrm{sn}(i\omega + K)\,\mathrm{sn}(\tau)\big(\mathrm{sn}(\tau + i\omega) + \mathrm{sn}(\tau - i\omega)\big) \\ -i\dfrac{1}{k'}\,\mathrm{dn}(i\omega + K)\,\mathrm{dn}(\tau)\big(\mathrm{dn}(\tau + i\omega) + \mathrm{dn}(\tau - i\omega)\big) \end{array}\right]$$

Der Ausdruck rechts ist eine Funktion mit den zwei Perioden $2K$ und $2iK'$ und hat einen Pol dritter Ordnung für das Argument $\tau = iK'$. Er ist also identisch mit:

$$\Delta_{\mathfrak{G}} = a + b\,Z(\tau - iK') + c\,\dot{Z}(\tau - iK') + d\,\ddot{Z}(\tau - iK')$$

Die Konstanten a, b, c, d sind noch zu bestimmen.

Die doppeltperiodische Funktion (25) besitzt nur einen Pol, also muß das Residuum verschwinden:

$$b = 0,$$

sie ist ferner eine gerade Funktion, während $\ddot{Z}(\tau - iK')$ eine ungerade ist, also ist

$$d = 0.$$

Um noch a und c zu finden, setzen wir einmal $\tau = 0$ und dann $\tau = K$ und erhalten die Beziehungen:

$$\left[\text{wenn } \varepsilon = \frac{1 + k^2}{3} + 2\frac{N_3}{N_1}\right]$$

$$a + c \cdot \varepsilon = -2i$$
$$a + c\,(\varepsilon - k^2) = -2i$$

also: $c = 0$

$a = -2i$

d. h. $\Delta_G = -2i$ (26)

Diese Determinante ist also eine reine Zahl, unabhängig von Zeit, Massenverteilung und Anfangsbedingungen des Kreisels.

In den allgemeinen Lösungen der Differentialsysteme (19) und (19[a]) werden auch die Unterdeterminanten von Δ_R und Δ_G erscheinen. Wir geben daher ihre Werte an:

Es sei: $\rho_1 = -i\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}; \quad \rho_3 = -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}$

$$\mathcal{Z}_2 = \delta_2 \cdot \tau + Z(\tau - K); \quad \mathcal{Z}_3 = \delta_3 \cdot \tau + Z(\tau - K - iK')$$

dann sind die Unterdeterminanten von Δ_R:

$$\Delta_{R_I^{(1)}} = \begin{vmatrix} R_{II}^{(2)} & R_{II}^{(3)} \\ R_{III}^{(2)} & R_{III}^{(3)} \end{vmatrix} = -\rho_3 \frac{k'^2}{k^2} \mathcal{Z}_2 \cdot \mathrm{cn}(\tau)$$

$$\Delta_{R_{II}^{(1)}} = -\begin{vmatrix} R_I^{(2)} & R_I^{(3)} \\ R_{III}^{(2)} & R_{III}^{(3)} \end{vmatrix} = \rho_3 \frac{k'^2}{k^2} \mathrm{cn}(\tau)$$

$$\Delta_{R_{III}^{(1)}} = \begin{vmatrix} R_I^{(2)} & R_I^{(3)} \\ R_{II}^{(2)} & R_{II}^{(3)} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{R_I^{(2)}} = -\begin{vmatrix} R_{II}^{(1)} & R_{II}^{(3)} \\ R_{III}^{(1)} & R_{III}^{(3)} \end{vmatrix} = \rho_1 \rho_3 \cdot \mathrm{sn}(\tau) \times \left(\frac{k'^2}{k^2} \mathcal{Z}_2 - k'^2 \mathcal{Z}_3 + \frac{k'^4}{k^2} \frac{1}{\mathrm{sn}(\tau)\,\mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)} \right)$$

$$\Delta_{R_{II}^{(2)}} = \begin{vmatrix} R_I^{(1)} & R_I^{(3)} \\ R_{III}^{(1)} & R_{III}^{(3)} \end{vmatrix} = -\rho_1 \rho_3 \frac{k'^2}{k^2} \mathrm{sn}(\tau) \qquad (27)$$

$$\Delta_{R_{III}^{(2)}} = -\begin{vmatrix} R_I^{(1)} & R_I^{(3)} \\ R_{II}^{(1)} & R_{II}^{(3)} \end{vmatrix} = \rho_1 \rho_3 k'^2 \mathrm{sn}(\tau)$$

$$\Delta_{R_I^{(3)}} = \begin{vmatrix} R_{II}^{(1)} & R_{II}^{(2)} \\ R_{III}^{(1)} & R_{III}^{(2)} \end{vmatrix} = \rho_1 k'^2 \mathcal{Z}_2 \,\mathrm{dn}(\tau)$$

$$\Delta_{R_{II}^{(3)}} = -\begin{vmatrix} R_I^{(1)} & R_I^{(2)} \\ R_{III}^{(1)} & R_{III}^{(2)} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{R_{III}^{(3)}} = \begin{vmatrix} R_I^{(1)} & R_I^{(2)} \\ R_{II}^{(1)} & R_{II}^{(2)} \end{vmatrix} = -\rho_1 k'^2 \,\mathrm{dn}(\tau)$$

Für die Unterdeterminanten von Δ_G berechnen wir die Werte:

$$\Delta_{G_I^{(1)}} = \begin{vmatrix} G_{II}^{(2)} & G_{II}^{(3)} \\ G_{III}^{(2)} & G_{III}^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{-\Theta_{(0)} H_{1(0)}}{\Theta^2(\tau)\ \Theta_1{}^2(i\omega)} \times$$
$$\left[\Theta_1(\tau - i\omega) H(\tau + i\omega) - \Theta_1(\tau + i\omega) H(\tau - i\omega)\right]$$

Diese Funktion hat einen Pol zweiter Ordnung für $\tau = iK'$, sie ist eine doppeltperiodische Funktion zweiter Art mit den Multiplikatoren:

$$\mu_{2K} = -1; \quad \mu'_{2iK'} = -1$$

also

$$= a\,cn(\tau) + b\,sn(\tau)\,dn(\tau).$$

Da die Funktion $\Delta_{G_I^{(1)}}$ eine gerade ist, so ist $b = 0$ und wir finden:

$$\Delta_{G_I^{(1)}} = 2\frac{k}{k'} cn(i\omega + K)\,cn(\tau) \qquad (28)$$

$$\Delta_{G_{II}^{(1)}} = -\begin{vmatrix} G_I^{(2)} & G_I^{(3)} \\ G_{III}^{(2)} & G_{III}^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{-i\,e^{-\Omega\tau}}{\Theta^2(\tau)\,\Theta^2{}_1(i\omega)}\Big[H_1(0)\,H_1(i\omega)\,H(\tau)\,H(\tau + i\omega)$$
$$+ \Theta(0)\,\Theta(i\omega)\,\Theta_1(\tau)\,\Theta_1(\tau + i\omega)\Big]$$

Diese Funktion wird ∞^2 für $\tau = iK'$; sie ist ebenfalls eine doppeltperiodische Funktion zweiter Art mit den Multiplikatoren

$$\mu_{2K} = +e^{-2K\Omega}; \quad \mu'_{2iK'} = +e^{-2iK'\Omega - \frac{i\pi}{K} i\omega}$$

also

$$= e^{-\Omega\tau}\left[a\frac{\Theta(\tau + i\omega)}{\Theta(\tau)} + b\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\Theta(\tau + i\omega)}{\Theta(\tau)}\right)\right]$$

Im vorletzten Ausdrucke verschwindet der Faktor von $\frac{1}{\Theta^2(\tau)}$ im Punkte $\tau = iK'$.

Da im letzten Ausdruck die Funktion $\left(\dot{\Theta}(\tau + i\omega)\,\Theta(\tau) - \dot{\Theta}(\tau)\,\Theta(\tau + i\omega)\right)$ an der Stelle $\tau = iK'$ im allgemeinen nicht verschwindet, so muß $b = 0$ sein. Indem wir die beiden Funktionen z. B. an der Stelle $\tau = 0$ miteinander vergleichen, finden wir:

$$\Delta_{G_{II}^{(1)}} = -i\frac{\Theta_1(0)}{\Theta_1(i\omega)} \cdot e^{-\Omega\tau}\,\frac{\Theta(\tau + i\omega)}{\Theta(\tau)} \qquad (28)$$

In der gleichen Weise ergeben sich die übrigen Unterdeterminanten:

$$\Delta_{G_{III}^{(1)}} = + \begin{vmatrix} G_I^{(2)} & G_I^{(3)} \\ G_{II}^{(2)} & G_{II}^{(3)} \end{vmatrix} = - i \frac{\Theta_1(0)}{\Theta_1(i\omega)} e^{\Omega\tau} \cdot \frac{\Theta(\tau - i\omega)}{\Theta(\tau)}$$

$$\Delta_{G_I^{(2)}} = - \begin{vmatrix} G_{II}^{(1)} & G_{II}^{(3)} \\ G_{III}^{(1)} & G_{III}^{(3)} \end{vmatrix} = - 2 i k \operatorname{sn}(i\omega + K) \operatorname{sn}(\tau)$$

$$\Delta_{G_{II}^{(2)}} = + \begin{vmatrix} G_I^{(1)} & G_I^{(3)} \\ G_{III}^{(1)} & G_{III}^{(3)} \end{vmatrix} = - \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(i\omega)} e^{-\Omega\tau} \frac{\Theta_1(\tau + i\omega)}{\Theta(\tau)}$$

$$\Delta_{G_{III}^{(2)}} = - \begin{vmatrix} G_I^{(1)} & G_I^{(3)} \\ G_{II}^{(1)} & G_{II}^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(i\omega)} e^{+\Omega\tau} \frac{\Theta_1(\tau - i\omega)}{\Theta(\tau)} \qquad (28)$$

$$\Delta_{G_I^{(3)}} = + \begin{vmatrix} G_{II}^{(1)} & G_{II}^{(2)} \\ G_{III}^{(1)} & G_{III}^{(2)} \end{vmatrix} = - 2 i \frac{1}{k'} \operatorname{dn}(i\omega + K) \operatorname{dn}(\tau)$$

$$\Delta_{G_{II}^{(3)}} = - \begin{vmatrix} G_I^{(1)} & G_I^{(2)} \\ G_{III}^{(1)} & G_{III}^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(i\omega)} e^{-\Omega\tau} \frac{H(\tau + i\omega)}{\Theta(\tau)}$$

$$\Delta_{G_{III}^{(3)}} = + \begin{vmatrix} G_I^{(1)} & G_I^{(2)} \\ G_{II}^{(1)} & G_{II}^{(2)} \end{vmatrix} = - \frac{H_1(0)}{\Theta_1(i\omega)} e^{+\Omega\tau} \frac{H(\tau - i\omega)}{\Theta(\tau)}$$

Um nun endlich die gesuchten Lösungen der nicht homogenen Differentialsysteme (19) und (19[a]) anzugeben, bedienen wir uns der Methode der Variation der Konstanten.

Wir definieren die Größen L_{lmn} und M_{lmn} durch die Gleichungen:

$$R_I^{(i)} \dot{L}_{lmn}^{(I)} + R_{II}^{(i)} \dot{L}_{lmn}^{(II)} + R_{III}^{(i)} \dot{L}_{lmn}^{(III)} = \Re_{lmn}^{(i)}$$
$$i = 1, 2, 3$$

$$G_I^{(i)} \dot{M}_{lmn}^{(I)} + G_{II}^{(i)} \dot{M}_{lmn}^{(II)} + G_{III}^{(i)} \dot{M}_{lmn}^{(III)} = \mathfrak{G}_{lmn}^{(i)}$$
$$i = 1, 2, 3$$

wobei $$\dot{L} = \frac{dL}{dt}; \quad at + b = \tau$$

oder aufgelöst:

$$L_{lmn}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_R} \int_0^t \sum_1^3{}_i \Delta_{R_j^{(i)}} \Re_{lmn}^{(i)} dt$$
$$j = I, II, III \qquad (29)$$

$$M_{lmn}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_G} \int_0^t \sum_1^3{}_i \Delta_{G_j^{(i)}} \mathfrak{G}_{lmn}^{(i)} dt$$
$$j = I, II, III$$

und erhalten für die gewünschten Funktionen die Werte:

$$R^{(i)}_{lmn} = r^{(I)}_{lmn} R^{(i)}_{I} + r^{(II)}_{lmn} R^{(i)}_{II} + r^{(III)}_{lmn} R^{(i)}_{III} + \sum_{I}^{III} j \; R^{(i)}_{j} L^{(j)}_{lmn}$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$G^{(i)}_{lmn} = g^{(I)}_{lmn} G^{(i)}_{I} + g^{II}_{lmn} G^{(i)}_{II} + g^{III}_{lmn} G^{(i)}_{III} + \sum_{I}^{III} j \; G^{(i)}_{j} M^{(i)}_{lmn} \qquad (30)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Die Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ sind in der Weise zu berechnen, wie sie durch die Gleichungen (18) vorgeschrieben ist.

Die von t unabhängigen Konstanten r_{lmn} und g_{lmn} sind bestimmt durch Systeme von linearen algebraischen Gleichungen, die durch die Anfangsbedingungen für die $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ gegeben sind. Wir haben die Anfangsbedingungen für die Funktionen r_i und γ_i bereits in $R^{(i)}_{0}$ und $G^{(i)}_{0}$ aufgenommen, darum ist:

$$\left[R^{(i)}_{lmn}\right]_{t=0} = 0 \text{ für } \begin{matrix} l = 0, 1, 2 \ldots \\ m = 0, 1, 2 \ldots \\ n = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

ausgenommen gleichzeitig $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ (31)

$$\left[G^{(i)}_{lmn}\right]_{t=0} = 0 \text{ für dieselben Werte von } l, m, n.$$

Die Determinanten dieser linearen Gleichungen sind natürlich identisch mit den Determinanten der Fundamentalsysteme, Δ_R und Δ_G. Diese sind von t unabhängig und von Null verschieden; die Glieder, welche nicht Faktoren von r_{lmn} oder g_{lmn} sind, verschwinden an der Stelle $t = 0$: also sind alle

$$r_{lmn} = 0 \text{ und } g_{lmn} = 0$$

und es ist:

$$R^{(i)}_{lmn} = \sum_{I}^{III} j \; R^{(i)}_{j} L^{(j)}_{lmn}$$

$$i = 1, 2, 3. \qquad (32)$$

$$G^{(i)}_{lmn} = \sum_{I}^{III} j \; G^{(i)}_{j} M^{(j)}_{lmn}$$

Wir haben damit alle Elemente zusammengestellt, aus denen die Funktionen r_i und γ_i aufzubauen sind. Bei der wirklichen Ausführung, d. h. bei der Berechnung der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$

mittels der angegebenen Recursionsformeln sind noch die Operationen der Multiplikation und Addition sowie der Integration zwischen den Grenzen 0 und t auszuführen. Diese Operationen sind allesamt eindeutig. Sie sind zunächst auszuführen an den Funktionen

$$R^{(i)}_{000} \text{ und } G^{(i)}_{000}; \; R^{(i)}_{j} \text{ und } G^{(i)}_{j};$$

$$\Delta_R \text{ und } \Delta_G; \; \Delta_{R^{(i)}_j} \text{ und } \Delta_{G^{(i)}_j}.$$

Diese Funktionen sind alle eindeutig. Durch eindeutige Operationen werden aus ihnen wieder eindeutige Funktionen abgeleitet.

Dieser Schluß setzt sich fort und es folgt, daß die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ und damit auch die Funktionen r_i und γ_i eindeutig bestimmt sind.

Wir wollen die Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ zunächst nicht in einer mehr einheitlichen Weise darstellen und begnügen uns damit, diesen Weg zur Berechnung der Größen

$$r_i = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R^{(i)}_{lmn}$$

$$\gamma_i = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n \; \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n G^{(i)}_{lmn} \qquad i = 1, 2, 3$$

beschrieben zu haben.

Die Frage nach dem funktionentheoretischen Charakter dieser Ausdrücke muß den Gegenstand einer besonderen Untersuchung bilden. Hier ist uns zunächst daran gelegen, einen gangbaren Weg zur Berechnung der Funktionen r_i und γ_i zu finden und zugleich ihren Verlauf in einem gewissen Bereiche zu erkennen. Diesem Zwecke können unsere Ausdrücke wohl entsprechen. Denn die $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ sind in sich geschlossene Funktionen von t, wir können sie als Teilschwingungen (l, m, n)^{ter} Ordnung bezeichnen, und wir können die Bewegungselemente r_i und γ_i des dreiachsigen festen Kreisels mit beliebiger Genauigkeit, in einem gewissen Bereiche der Variabeln, berechnen, wenn wir nur eine hinreichende Anzahl von Teilschwingungen, versehen mit dem zugehörigen Schwerpunktsfaktor $\sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n$ übereinanderlagern. Diese Methode gestattet uns zugleich, den stetigen Übergang des Schwerpunktskreisels zum allgemeinen Kreisel zu beobachten.

Wir sprachen bisher nur von den Größen γ_i nicht aber von α_i und β_i. Sobald wir die allgemeinen Ausdrücke für die

γ_i berechnet haben, können wir die Werte von α_i und β_i sofort angeben. Sie genügen ja denselben Differentialgleichungen wie die γ_i und unterscheiden sich von diesen und unter einander nur durch die Anfangsbedingungen. Und diese sind so zu wählen, daß die Geraden mit den Richtungskosinussen α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ ein rechtwinkliges Achsenkreuz bilden.

Über die Konvergenz der Funktionen r_i und γ_i $(i = 1, 2, 3)$.

Als wir aus dem Satze von Poincaré die Berechtigung ableiteten, die Größen r_i und γ_i so darzustellen, wie wir es taten, erkannten wir zugleich, daß diese Ausdrücke sicher konvergieren für

$$|\sigma_j| < \frac{r}{6\left(1 + 2\,e^{\frac{6RT}{r}}\right)} \qquad j = 1, 2, 3.$$

Wir wissen auch, daß r und R endlich bleiben, wenn wir T beliebige reelle Werte durchlaufen lassen; unsere Ausdrücke für r_i und γ_i können also für alle reellen t verwendet werden, wenn nur die Parameter σ_j hinreichend klein genommen werden. Aus der Formel, die wir eben anschrieben, erkennen wir, daß beim Anstieg des t (T) die σ_j rasch abfallen würden; doch gibt diese allgemeine Formel natürlich keine obere Grenze für σ_j.

Die Frage nach einer Formel, welche die Beziehungen zwischen σ_j und t genauer darstellt, wenn die dreifach unendlichen Reihen für r_i und γ_i eben noch konvergieren, muß behandelt werden, wenn wir in einer besonderen Untersuchung den analytischen Charakter der Funktionen r_i und γ_i im komplexen Bereich betrachten werden. An dieser Stelle wollen wir uns nur durch eine einfache Überlegung darüber Aufschluß verschaffen, wie wir die Größen $\mu_i, T_i, R_0^{(i)}(0)$ wählen müssen, um die Reihen für r_i und γ_i gut konvergent zu erhalten; denn bei einer Diskussion werden wir uns zunächst doch auf eine begrenzte Anzahl von Gliedern beschränken müssen.

Doch bevor wir dies beginnen, möchten wir ein einfaches Beispiel für den Poincaréschen Satz angeben, bei dem wir die erwähnte Beziehung zwischen den Parametern und der unabhängigen Variabeln kennen.

Am Anfang begegnete uns ein Differentialsystem der Form:

$$\frac{dx_i}{dt} = \mu_1 x_2 x_3 \text{ u. s. w.} \qquad (\alpha)$$

mit der Lösung

$$x_1 = c_1 \operatorname{cn}(at+b);\ x_2 = c_2 \operatorname{sn}(at+b);\ x_3 = c_3 \operatorname{dn}(at+b). \quad (\beta)$$

Diese x_i lassen sich darstellen durch Reihen nach Potenzen des Moduls k, mit Funktionen von t als Koeffizienten, die für

$$|k|<1;\ |at+b|<K'\left(=\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}}\right) \quad (\gamma)$$

konvergieren.

Nun ist: $$k^2 = \left[\frac{\mu_3(\mu_1 x_0^{2(2)} - \mu_2 x_0^{2(1)})}{\mu_1(\mu_3 x_0^{2(2)} - \mu_2 x_0^{2(3)})}\right]_{t=0};\ k'^2 = 1-k^2.$$

Wir können also x_1 u. s. w. darstellen durch dreifach unendliche Reihen der Form:

$$x_i = \sum_0^\infty l \sum_0^\infty m \sum_0^\infty n\ \mu_1^l \mu_2^m \mu_3^n X^{(i)}_{l\,m\,n}(t) \qquad i=1,2,3 \quad (\delta)$$

und wissen, daß

$$x_i = \infty^1 \text{ für } at+b = iK' \quad (\varepsilon)$$

und dabei sind, wie wir wissen, a und b selbst Funktionen von μ_i.

Dieselben Ausdrücke (δ) müssen wir aber sofort erhalten, wenn wir das Differentialsystem (α) nach dem Satze von Poincaré im komplexen Bereiche behandeln, indem wir $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$ als reelle Parameter betrachten. Hier kennen wir also auch die Beziehung, welche zwischen der unabhängigen Variabeln und den Parametern besteht, wenn die Reihen endlich bleiben sollen: die Reihen divergieren, wenn

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu_1(\mu_3 x_0^{2(2)} - \mu_2 x_0^{2(3)})_{t=0}}} \times$$

$$\left[i\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}} - \int_0^{\sqrt{\left(\frac{\mu_1 x_0^{2(2)}}{\mu_1 x_0^{2(2)} - \mu_2 x_0^{2(1)}}\right)_{t=0}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \right] \quad (\zeta)$$

Die Werte $(x_0^{(i)})_{t=0}$ sind gegeben durch die Anfangsbedingungen. Dabei sind die Moduln k^2 und k'^2 dieser elliptischen Integrale erster Gattung selbst gebrochene lineare Funktionen der Parameter $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$.

Wir gehen jetzt daran, die Konvergenz unserer Ausdrücke für r_i und γ_i in einem einfachen Falle zu untersuchen.

Es sei $\sigma_1 = \sigma \gtrless 0;\ \sigma_2 = 0;\ \sigma_3 = 0$

dann ist

$$r_i = \sum_0^{\infty} l\, \sigma^l R_l^{(i)} \text{ wobei } R_l^{(i)} \equiv R_{l,0,0}^{(i)}$$

$$\gamma_i = \sum_0^{\infty} l\, \sigma^l G_l^{(i)} \text{ wobei } G_l^{(i)} \equiv G_{l,0,0}^{(i)} \qquad (33)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Die Funktionen $R_{l,0,0}^{(i)}$ und $G_{l,0,0}^{(i)}$, die wir wohl auch als Störungsfunktionen der Teilschwingungen bezeichnen können, nehmen die Form an:

$$\mathfrak{R}_1^{(1)} = 0$$

$$\mathfrak{R}_1^{(2)} = -\frac{1}{T_2} G_0^{(3)}$$

$$\mathfrak{R}_1^{(3)} = \frac{1}{T_3} G_0^{(2)}$$

$$\mathfrak{G}_1^{(1)} = G_0^{(2)} R_1^{(3)} - G_0^{(3)} R_1^{(2)}$$
$$\mathfrak{G}_1^{(2)} = G_0^{(3)} R_1^{(1)} - G_0^{(1)} R_1^{(3)}$$
$$\mathfrak{G}_1^{(3)} = G_0^{(1)} R_1^{(2)} - G_0^{(2)} R_0^{(1)}$$

$$\mathfrak{R}_2^{(1)} = \mu_1 R_1^{(2)} R_1^{(3)}$$

$$\mathfrak{R}_2^{(2)} = \mu_2 R_1^{(3)} R_1^{(1)} - \frac{1}{T_2} G_1^{(3)}$$

$$\mathfrak{R}_2^{(3)} = \mu_3 R_1^{(1)} R_1^{(2)} + \frac{1}{T_3} G_1^{(2)} \qquad (34)$$

$$\mathfrak{G}_2^{(1)} = G_1^{(2)} R_1^{(3)} + G_0^{(2)} R_2^{(3)} - G_1^{(3)} R_1^{(2)} - G_0^{(3)} R_2^{(2)}$$
$$\mathfrak{G}_2^{(2)} = G_1^{(3)} R_1^{(1)} + G_0^{(3)} R_2^{(1)} - G_1^{(1)} R_1^{(3)} - G_0^{(1)} R_2^{(3)}$$
$$\mathfrak{G}_2^{(3)} = G_1^{(1)} R_1^{(2)} + G_0^{(1)} R_2^{(2)} - G_1^{(2)} R_1^{(1)} - G_0^{(2)} R_2^{(1)}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\mathfrak{R}_l^{(1)} = \mu_1 [R_{l-1}^{(2)} R_1^{(3)} + R_{l-2}^{(2)} R_2^{(3)} + \ldots + R_1^{(2)} R_{l-1}^{(3)}]$$

$$\mathfrak{R}_l^{(2)} = \mu_2 [R_{l-1}^{(3)} R_1^{(1)} + \ldots\ldots\ldots + R_1^{(3)} R_{l-1}^{(1)}] - \frac{1}{T_2} G_{l-1}^{(3)}$$

$$\mathfrak{R}_l^{(3)} = \mu_3 [R_{l-1}^{(1)} R_1^{(2)} + \ldots\ldots\ldots + R_1^{(1)} R_{l-1}^{(2)}] + \frac{1}{T_3} G_{l-1}^{(2)}$$

$$\mathfrak{G}_1^{(1)} = G_{1-1}^{(2)} R_1^{(3)} + G_{1-2}^{(2)} R_2^{(3)} + \ldots + G_1^{(2)} R_0^{(3)} - G_{1-1}^{(3)} R_1^{(2)} - G_{1-2}^{(3)} R_2^{(2)} \ldots - G_0^{(3)} R_1^{(2)}$$

$$\mathfrak{G}_1^{(2)} = G_{1-1}^{(3)} R_1^{(1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + G_0^{(3)} R_1^{(1)} - G_{1-1}^{(1)} R_1^{(3)} - \ldots - G_0^{(1)} R_1^{(3)}$$

$$\mathfrak{G}_1^{(3)} = G_{1-1}^{(1)} R_1^{(2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + G_0^{(1)} R_1^{(2)} - G_{1-1}^{(2)} R_1^{(1)} - \ldots - G_0^{(2)} R_1^{(1)}$$

Wir werden danach streben, den Funktionen $R_1^{(i)}$ und $G_1^{(i)}$ majorante Funktionen gegenüber zu stellen und betrachten zunächst die Größen $R_j^{(i)}$, $G_j^{(i)}$, $\Delta_{R_j^{(i)}}$, $\Delta_{G_j^{(i)}}$ $(i = 1, 2, 3,\ j = I, II, III)$, die in Gl. (20) (23) (27) (28) gegeben sind.

Sie sind alle Polynome der Funktionen

$$\tau = at + b \qquad (\alpha)$$

$$\mathrm{cn}(\tau),\ \mathrm{sn}(\tau),\ \mathrm{dn}(\tau),\ Z(\tau + A) \qquad (\beta) \qquad (35)$$

$$\frac{H(\tau + A)}{\Theta(\tau)} e^{\pm \Omega \tau} \quad \text{u. s. w.} \qquad (\gamma)$$

(Die Bedeutungen von A und A sind leicht ersichtlich.)

Die Funktionen (β) haben die reelle Periode 4 K, sie bleiben endlich für alle reellen τ.

Die Funktionen (γ) erhalten den Multiplikator

$$\mu_{4K} = e^{\pm 4K\Omega}$$

wenn τ um 4 K wächst. Nun ist Ω eine rein imaginäre Größe, also ist

$$|\mu_{4K}| \leq 1.$$

Wir können also positiv-reelle Zahlen α_λ und β_λ so bestimmen, daß für alle positiv-reellen Werte von t die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} &|R_0^{(i)}| < \beta_1 \quad ; \quad |G_0^{(i)}| < \beta_2 \\ &|R_j^{(i)}| < \alpha_1 t + \beta_3 \ ; \ |G_j^{(i)}| < \beta_4 \\ &|\Delta_{R_j^{(i)}}| < \alpha_2 t + \beta_5 ; \ |\Delta_{G_j^{(i)}}| < \beta_6 \\ &\qquad i = 1, 2, 3;\ j = I, II, III. \end{aligned} \qquad (36)$$

Die Determinanten Δ_R und Δ_G sind von t unabhängig, also ist

$$|\Delta_R| < \beta_7 \quad ; \quad |\Delta_G| < \beta_8$$

So finden wir schließlich die positiv-reellen Zahlen α und β so, daß

$$\left(|R_0^{(i)}|,\ |G_0^{(i)}|,\ |R_j^{(i)}|,\ |G_j^{(i)}|,\ \frac{|\Delta_{R_j^{(i)}}|}{|\Delta_R|},\ \frac{|\Delta_{G_j^{(i)}}|}{|\Delta_G|}\right) < \alpha t + \beta \qquad (37)$$

für alle positiv-reellen t.

Außerdem bestimmen wir die positiv-reelle Zahl $\varkappa$ so, daß

$$\left(|\mu_1|,\ |\mu_2|,\ |\mu_3|,\ \left|\frac{1}{T_1}\right|,\ \left|\frac{1}{T_2}\right|,\ \left|\frac{1}{T_3}\right|\right) \leqq \varkappa \qquad (37)$$

Wir benutzen nun die Gleichungen (29) und (32), durch welche die Funktionen $R_1^{(i)}$ und $G_1^{(i)}$ bestimmt sind und erhalten:

$$|R_1^{(i)}| < 9\varkappa(\alpha t+\beta)\int_0^t (\alpha t+\beta)^2\,dt$$

$$< \frac{9\varkappa}{3\alpha}(\alpha t+\beta)^4 \qquad = P_1 r_1$$

$$|G_1^{(i)}| < 9(\alpha t+\beta)\int_0^t 2(\alpha t+\beta)^6 \frac{9\varkappa}{3\alpha}\,dt$$

$$< \frac{9\varkappa\cdot 2\cdot 9}{\alpha^2\cdot 3\cdot 7}(\alpha t+\beta)^8 \qquad = \Gamma_1 g_1$$

$$|R_2^{(i)}| < 9\varkappa(\alpha t+\beta)\int_0^t (\alpha t+\beta)^9\left[\frac{9\varkappa\cdot 9\varkappa}{\alpha^2\cdot 3\cdot 3}+\frac{9\varkappa\cdot 2\cdot 9}{\alpha^2\cdot 2\cdot 7}\right]dt$$

$$< \frac{(9\varkappa)^2\cdot 2\cdot 9}{\alpha^3\cdot 3\cdot 10}(\alpha t+\beta)^{11} r_2 \qquad = P_2 r_2$$

$$\text{wobei} \quad r_2 = \frac{\varkappa}{2\cdot 3}+\frac{1}{7} \qquad (38)$$

$$|G_2^{(i)}| < 9(\alpha t+\beta)\int_0^t (\alpha t+\beta)^{12}\cdot 2\left[\frac{9\varkappa\cdot 2\cdot 9}{\alpha^2\cdot 3\cdot 7}\,\frac{9\varkappa}{3\alpha}+\frac{(9\varkappa)^2\cdot 2\cdot 9}{\alpha^3\cdot 3\cdot 10}r_2\right]dt$$

$$< \frac{(9\varkappa)^2(2\cdot 9)^2}{\alpha^4\cdot 3\cdot 14}(\alpha t+\beta)^{15} g_2 \qquad = \Gamma_2 g_2$$

$$\text{wobei} \quad g_2 = \frac{1}{3\cdot 7}+\frac{r_2}{10}$$

$$|R_3^{(i)}| < \frac{(9\varkappa)^3(2\cdot 9)^2}{\alpha^5\cdot 3\cdot 17}(\alpha t+\beta)^{18} r_3 \qquad = P_3 r_3$$

$$\text{wobei} \quad r_3 = \frac{\varkappa r_2}{3\cdot 10}+\frac{g_2}{14}$$

$$|G_3^{(i)}| < \frac{(9\varkappa)^3 (2\cdot 9)^3}{\alpha^6 \cdot 3 \cdot 21} (\alpha t + \beta)^{22} g_3 = \Gamma_3 g_3$$

$$g_3 = \frac{g_2}{3\cdot 14} + \frac{r_2}{3\cdot 7\cdot 10} + \frac{r_3}{17}$$

$$|R_4^{(i)}| < \frac{(9\varkappa)^4 (2\cdot 9)^3}{\alpha^7 \cdot 3 \cdot 24} (\alpha t + \beta)^{25} r_4 = P_4 r_4$$

$$r_4 = \frac{\varkappa r_3}{3\cdot 17} + \frac{\varkappa r_2^2}{2\cdot 3\cdot 10\cdot 10} + \frac{g_3}{21}$$

$$|G_4^{(i)}| < \frac{(9\varkappa)^4 (2\cdot 9)^4}{\alpha^8 \cdot 3 \cdot 28} (\alpha t + \beta)^{29} g_4 = \Gamma_4 g_4$$

$$g_4 = \frac{g_3}{3\cdot 21} + \frac{g_2 r_2}{3\cdot 10\cdot 14} + \frac{r_3}{3\cdot 7\cdot 17} + \frac{r_4}{24}$$

$$|R_5^{(i)}| < \frac{(9\varkappa)^5 (2\cdot 9)^4}{\alpha^9 \cdot 3 \cdot 31} (\alpha t + \beta)^{32} r_5 = P_5 r_5$$

$$r_5 = \frac{\varkappa r_4}{3\cdot 24} + \frac{\varkappa r_3 r_2}{3\cdot 10\cdot 17} + \frac{g_4}{28}$$

$$|G_5^{(i)}| < \frac{(9\varkappa)^5 (2\cdot 9)^5}{\alpha^{10} \cdot 3 \cdot 35} (\alpha t + \beta)^{36} g_5 = \Gamma_5 g_5$$

$$g_5 = \frac{g_4}{3\cdot 28} + \frac{g_3 r_2}{3\cdot 10\cdot 21} + \frac{g_2 r_3}{3\cdot 14\cdot 17} + \frac{r_4}{3\cdot 7\cdot 24} + \frac{r_5}{31}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$|R_l^{(i)}| < \frac{(9\varkappa)^1 (2\cdot 9)^{l-1}}{\alpha^{2l-1} 3\cdot(3+7(l-1))} (\alpha t + \beta)^{4+7(l-1)} r_l = P_l r_l$$

$$r_l = \frac{\varkappa r_{l-1}}{3(3+7(l-2))} + \cdots\cdots + \frac{g_{l-1}}{7(l-1)}$$

$$|G_l^{(i)}| < \frac{(9\varkappa)^1 (2\cdot 9)^1}{\alpha^{21} 3\ 7\ l} (\alpha t + \beta)^{1+7l} g_l = \Gamma_l g_l$$

$$g_l = \frac{g_{l-1}}{3\cdot 7(l-1)} + \cdots\cdots + \frac{r_l}{3+7(l-1)}$$

Nun tragen wir Sorge dafür, daß

$$\varkappa < 6, \text{ so daß } r_2 \leqq 1.$$

Dann ist:

$$r_2 > g_2 > r_3 > g_3 > r_4 > g_4 > r_5 > g_5 > \cdots\cdots > r_l > g_l \qquad (39)$$

und

$$\lim_{l=\infty} r_l = 0$$

Mittels der positiv-reellen Größen $P_1 \mathfrak{r}_1$ und $\Gamma_1 \mathfrak{g}_1$ bilden wir die Reihen:

$$P = \sum_0^\infty l \, |\sigma|^l P_1 \mathfrak{r}_1$$
$$\Gamma = \sum_0^\infty l \, |\sigma|^l \Gamma_1 \mathfrak{g}_1 \tag{40}$$

Diese sind nach dem Kriterium von Raabe-Duhamel sicher konvergent, wenn

$$\frac{P_1 \mathfrak{r}_1}{|\sigma| P_{l+1} \mathfrak{r}_{l+1}} = 1 + \frac{1+\varepsilon}{l} + \ldots\ldots;$$

falls $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\Gamma_1 \mathfrak{g}_1}{|\sigma| \Gamma_{l+1} \mathfrak{g}_{l+1}} = 1 + \frac{1+\varepsilon}{l} + \ldots\ldots$$

für hinreichend große l.

Diese Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn:

$$|\sigma| (\alpha t + \beta)^7 \ll \frac{\alpha^2}{9 \varkappa \cdot 2 \cdot 9} = \mathfrak{S}. \tag{41}$$

[Bemerkung: Die Zahlenfolge

$$\mathfrak{r}_2, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{r}_4, \mathfrak{g}_4, \ldots\ldots \mathfrak{r}_1, \mathfrak{g}_1$$

ist auch für $\varkappa > 6$ konvergent. Doch ziehen wir aus dieser Erkenntnis keinen Nutzen und erlassen darum den Beweis.]

Die Glieder der Reihen für r_i und γ_i in Gl. (33) sind ihrem absoluten Betrage nach kleiner als die Glieder der Reihen P und Γ. Diese Funktionen r_i und γ_i werden also um so besser konvergieren für alle Werte von σ und t, für welche P und Γ dies tun.

Aus Gl. (41) erkennen wir, daß $\mathfrak{S}$ groß wird, wenn $\varkappa$ sehr klein ist; dies tritt ein, wenn die Hauptträgheitsachsen $T_1 T_2 T_3$ groß und zugleich wenig unter einander verschieden sind. Um t möglichst groß nehmen zu dürfen, werden wir die Konstanten α und β durch passende Anfangsbedingungen klein zu machen versuchen.

Noch einen anderen Schluß ziehen wir aus Gl. (41):

Wir dürfen t beliebige endliche Werte erreichen lassen, wenn wir nur σ hinreichend klein nehmen; dagegen kann (nach unserer

bisherigen Erkenntnis) die Größe σ eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten, wie klein auch t sei, denn es ist immer

$$|\sigma|\beta^7 < \mathfrak{S}$$

für sehr kleine t, und β ist eine feste Zahl.

Die Formel (41) kann dazu dienen, bei angenäherter Diskussion der Kreiselbewegung den Gültigkeitsbereich der gekürzten Funktionen (33) abzuschätzen.

Es ist nicht schwierig, diese vorläufige Konvergenzbetrachtung auf die Fälle

$$\sigma_1 \gtrless 0; \quad \sigma_2 \gtrless 0; \quad \sigma_3 = 0$$

und

$$\sigma_1 \gtrless 0; \quad \sigma_2 \gtrless 0; \quad \sigma_3 \gtrless 0$$

zu übertragen.

II. Teil.

In den Betrachtungen des I. Teiles begegnet uns ein Differentialsystem der Form:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu_1 [x_2 \cdot p_3 + x_3 p_2] \\ \frac{dx_2}{dt} &= \mu_2 [x_3 p_1 + x_1 p_3] \\ \frac{dx_3}{dt} &= \mu_3 [x_1 p_2 + x_2 p_1] \end{aligned} \tag{1}$$

wobei:

$$p_1 = c_1 \operatorname{cn}(at + b); \quad p_2 = c_2 \operatorname{sn}(at + b); \quad p_3 = c_3 \operatorname{dn}(at + b)$$

$$\frac{c_1^2}{\mu_1} = \frac{-c_2^2}{\mu_2} = \frac{c_3^2 k^2}{\mu_3}; \quad a^2 = -\mu_1 \mu_2 c_3^2.$$

Um die Lösung dieses Systems nach den Sätzen der Funktionenlehre darzustellen, ersetzen wir es durch eine ihm gleichwertige lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, indem wir z. B. x_1 und x_3 eliminieren.

Durch wiederholte Differentation der zweiten Gleichung folgen mit Rücksicht auf die beiden anderen die neuen Beziehungen:

$$\ddot{x}_2 = \mu_2 \left[x_2 (\mu_1 p^2{}_3 + \mu_3 p^2{}_1) + x_1 (\dot{p}_3 + \mu_3 p_1 p_2) + x_3 (\dot{p}_1 + \mu_1 p_2 p_3) \right] \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \dddot{x}_2 = \mu_2 \Big[& \dot{x}_2 (\mu_1 p^2{}_3 + \mu_3 p^2{}_1) + x_2 (3 \mu_1 p_3 \dot{p}_3 + 3 \mu_3 p_1 \dot{p}_1 + 2 \mu_1 \mu_3 p_1 p_2 p_3) \\ & + x_1 (\ddot{p}_3 + \mu_3 p_1 \dot{p}_2 + 2 \mu_3 \dot{p}_1 p_2 + \mu_1 \mu_3 p^2{}_2 p_3) \\ & + x_3 (\ddot{p}_1 + \mu_1 \dot{p}_2 p_3 + 2 \mu_1 p_2 \dot{p}_3 + \mu_1 \mu_3 p^2{}_2 p_1) \Big] \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) finden wir:

$$\Delta \cdot x_3 = \mu_2 \begin{vmatrix} \ddot{x}_2 - \mu_2 x_2 (\mu_1 p^2_3 + \mu_3 p^2_1) & \dot{p}_3 + \mu_3 p_1 p_2 \\ \dot{x}_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \cdot x_1 = \mu_2 \begin{vmatrix} \dot{p}_1 + \mu_1 p_2 p_3 & \ddot{x}_2 - \mu_2 x_2 (\mu_1 p^2_3 + \mu_3 p^2_1 \\ p_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$$\Delta = \mu^2_2 \begin{vmatrix} \dot{p}_1 + \mu_1 p_2 p_3 & \dot{p}_3 + \mu_3 p_1 p_2 \\ p_1 & p_3 \end{vmatrix}$$

Unter Benutzung dieser Werte geben wir der Gleichung (2) die Gestalt:

$$\begin{aligned} \dddot{x}_2 = {} & \ddot{x}_2 \frac{\mu_2}{\Delta} \left[p_3 \{x_3\} - p_1 \{x_1\} \right] \\ & + \dot{x}_2 \left[\{\dot{x}_2\} + \frac{\mu_2}{\Delta} \{x_1\} (\dot{p}_1 + \mu_1 p_2 p_3) - \frac{\mu_2}{\Delta} \{x_3\} (\dot{p}_3 + \mu_3 p_1 p_2) \right] \\ & + x_2 \left[\{x_2\} + \frac{\mu^2_2}{\Delta} (\mu_1 p^2_3 + \mu_3 p^2_1) (p_1 \{x_1\} - p_3 \{x_3\}) \right] \end{aligned} \qquad (4)$$

dabei ist: $\{x_2\}$ = Koeffizient von x_2 in Gl. (2) u. s. w.

Wir setzen in (4) die besonderen Werte von $p_1 p_2 p_3$ ein und erhalten für die Stellvertretungsgleichung die endgültige Form:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{d^3 x_2}{dt^3} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} a \cdot \frac{cn(at+b)\, dn(at+b)}{sn(at+b)} \\ & - \frac{dx_2}{dt} a^2 \left(6 k^2 sn^2(at+b) - 1 - k^2\right) \\ & - x_2 a^3 \frac{cn(at+b)\, dn(at+b)}{sn(at+b)} \left(6 k^2 sn^2(at+b) + 1 + k^2\right) \end{aligned}\right\} = 0 \qquad (5)$$

die wir den folgenden Betrachtungen zu Grunde legen.

Die Lösung der Differentialgleichung (5).

In diesem Abschnitt schreiben wir nur x für x_2.

Wir werden zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5) nach der Lehre von Fuchs und Frobenius durch Potenzreihen darstellen, dann von dem Umstande Gebrauch machen, daß die Koeffizienten der Gleichung doppeltperiodische Funktionen sind, um der Lösung nach den Sätzen von Picard über spezielle

Differentialgleichungen eine geschlossene Form mittels bekannter Funktionen zu geben.

Zu allererst ist die Kenntnis der singulären Stellen der Differentialgleichung notwendig. Ihre Koeffizienten besitzen gewöhnliche Pole nur an den Punkten $at+b=0$ und $at+b=iK'$ und deren homologen modulo $2K$, $2iK'$. An diesen Punkten allein sind auch die singulären Stellen der Lösung möglich. Da aber das ursprüngliche Differentialsystem (1) für das Argument $at+b=0$ sich regulär verhält, so muß dies auch die Lösung tun. Die direkte Untersuchung bestätigt dies.

Wir setzen $at+b=\tau$ und erhalten in der Normalform von Frobenius für die Stelle $\tau=0$ die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\tau^3\dddot{x} - \tau^2\ddot{x}\tau\frac{\mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)}{\mathrm{sn}(\tau)} - \tau\dot{x}\tau^2\left(6k^2\,\mathrm{sn}^2(\tau) - 1 - k^2\right)\\ - x\tau^3\frac{\mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)}{\mathrm{sn}(\tau)}\left(6k^2\,\mathrm{sn}^2(\tau) + 1 + k^2\right)\end{aligned}\right\} = 0 \qquad (6)$$

Ihre Lösung soll sein:

$$x = \tau^\rho \sum_0^\infty{}_\nu\, g_\nu \tau^\nu$$

ρ genügt der determinierenden Fundamentalgleichung:

$$\begin{aligned}\rho(\rho-1)(\rho-2) + \rho(\rho-1)(\cdot-1) &= 0\\ \text{oder}\qquad \rho(\rho-1)(\rho-3) &= 0\end{aligned} \qquad (7)$$

also ist ρ nicht negativ und x besitzt für $\tau=0$ keinen Pol.

Von einem allgemeinen Standpunkt aus betrachtet, beruht dieses Ergebnis darauf, daß an der Stelle $\tau=0$ der Koeffizient von $(\tau^2\ddot{x})$ die Form hat: $\left(-\tau\frac{d}{d\tau}\ln\mathrm{sn}(\tau)\right)_{\tau=0} = -1$, während die Koeffizienten von $(\tau\dot{x})$ und (x) verschwinden. Auf ganz analoge Weise verschwinden bei allen Stellvertretungsgleichungen höherer Ordnung für Linear-Systeme niederer Ordnung die infolge der Elimination neu hinzukommenden Pole der Differentialgleichung wieder aus der Lösung.

Die allgemeine Lösung der Gl. (b) ist auch frei von Logarithmen, trotzdem daß die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung sich um ganze Zahlen unterscheiden. Diese Eindeutigkeit entsteht hier in der Umgebung des Punktes $\tau=0$ genau auf dieselbe Art und Weise, wie wir sie unten für die Lösung in der Umgebung

des Punktes $\tau = i K'$ ausführlich erörtern werden. Die Stelle $\tau = 0$ ist also eine außerwesentlich singuläre Stelle der Differentialgleichung (5).

Im Punkte $\tau\,(= a t + b) = i K'$ dagegen besitzt auch die Lösung einen Pol. Wir untersuchen hier die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}(\tau - i K')^3 \dddot{x} - (\tau - i K')^2 \ddot{x}\,(\tau - i K')\,\frac{\mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)}{\mathrm{sn}(\tau)} \\ - (\tau - i K')\,\dot{x}\,(\tau - i K')^2\left(6 k^2 \mathrm{sn}^2(\tau) - 1 - k^2\right) \\ - x\,(\tau - i K')^3\,\frac{\mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)}{\mathrm{sn}(\tau)}\left(6 k^2 \mathrm{sn}^2(\tau) + 1 + k^2\right)\end{aligned}\right\} = 0$$

setzen $$(\tau - i K') = u$$

und erhalten die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}D(x) = u^3 \dddot{x} + u^2 \ddot{x}\,u\,\frac{\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}(u)} - u\,\dot{x}\,u^2\left(\frac{6}{\mathrm{sn}^2(u)} - 1 - k^2\right) \\ + x\,u^3\,\frac{\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}(u)}\left(\frac{6}{\mathrm{sn}^2(u)} + 1 + k^2\right)\end{aligned}\right\} = 0 \qquad (8)$$

Ihre determinierende Fundamentalgleichung im Punkte $u = 0$ ist:

$$\rho \cdot (\rho - 1)(\rho - 2) + \rho(\rho - 1) \cdot 1 + \rho(-6) + 6 = 0$$

oder $$(\rho + 2)(\rho - 1)(\rho - 3) = 0. \qquad (9)$$

Wir finden also, daß eine partikuläre Lösung für das Argument $u = 0$ einen Pol zweiter Ordnung besitzt. Die Wurzeln der Fundamentalgleichung unterscheiden sich auch hier um ganze Zahlen, so daß nach der allgemeinen Theorie besondere Untersuchungen über das Auftreten von Logarithmen in der vollständigen Lösung notwendig sind. Wir werden alsbald beim Aufbauen der Lösung erkennen, wie ihre Eindeutigkeit zustande kommt und auch unmittelbar einsehen, daß die gewonnenen partikulären Lösungen von einander linear unabhängig sind.

Wir wollen die Funktion x in der Umgebung des Punktes $u = 0$ darstellen. Es sei:

$$\mathfrak{P}_0(u) = 1 = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_{0\nu}\, u^\nu$$

$$\mathfrak{P}_1(u) = \frac{u\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}(u)} = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_{1\nu}\, u^\nu$$

$$= 1 - u^2\,\frac{2}{3!}(1 + k^2) - u^4\,\frac{2^4}{3!\,5!}(1 - 16 k^2 + k^4) + \ldots.$$

$$\mathfrak{P}_2(u) = -u^2\left(\frac{6}{\mathrm{sn}^2(u)} - 1 - k^2\right) = \sum_0^{\infty \nu} a_{2\nu} u^\nu \tag{10}$$

$$= -6 - u^2(1 + k^2) - u^4 \frac{8 \cdot 6}{5!}(1 - k^2 + k^4) + \ldots.$$

$$\mathfrak{P}_3(u) = u^3 \frac{\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}(u)}\left(\frac{6}{\mathrm{sn}^2(u)} + 1 + k^2\right) = \sum_0^{\infty \nu} a_{3\nu} u^\nu$$

$$= 6 + u^2(1 + k^2) - u^4 \frac{8}{5!}(11 + 4k^2 + 11k^4) + \ldots.$$

Die Koeffizienten der Lösungsreihe werden bekanntlich erhalten aus der Beziehung

$$D(x) = \sum_0^{\infty \nu} g_\nu u^{\nu+\rho} \cdot f(u, \nu + \rho) = 0$$

die für unendlich viele u erfüllt sein muß.

Dabei ist:

$$f(u, \rho) = \rho(\rho - 1)(\rho - 2)\mathfrak{P}_0(u) + \rho(\rho - 1)\mathfrak{P}_1(u) + \rho\mathfrak{P}_2(u) + \mathfrak{P}_3(u)$$

$$= \sum_0^{\infty \nu} u^\nu f_\nu(\rho)$$

also:

$$f_0(\rho) = \rho(\rho - 1)(\rho - 2)\ a_{00} + \rho(\rho - 1)\,a_{10} + \rho\,a_{20} + a_{30}$$

(Det. Fund. Gl.) (11)

$$f_\nu(\rho) = \rho(\rho - 1)(\rho - 2)\ a_{0\nu} + \rho(\rho - 1)\,a_{1\nu} + \rho\,a_{2\nu} + a_{3\nu}$$

Schließlich werden die Koeffizienten g_ν bestimmt durch die Recursionsformeln:

$$g_0 f_0(\rho) = 0$$

$$g_\nu f_0(\rho + \nu) + g_{\nu-1} f_1(\rho + \nu - 1) + \ldots\ldots + g_1 f_{\nu-1}(\rho + 1) + g_0 f_\nu(\rho) = 0 \tag{12}$$

Mit Benutzung der Gl. (10) erhalten wir die Werte:

$$f_0(\rho) = (\rho + 2)(\rho - 1)(\rho - 3)$$

$$f_1(\rho) = 0$$

$$f_2(\rho) = (1 + k^2)\left(-\frac{1}{3}\rho(\rho - 1) - \rho + 1\right) \tag{13}$$

$$f_3(\rho) = 0$$

$$f_4(\rho) = -\frac{8}{5!}\left(\frac{1}{3}\rho(\rho-1)+6\rho+11-k^2 \times \left[\frac{16}{3}\rho(\rho-1)+6\rho-4\right]+k^4\left[\frac{1}{3}\rho(\rho-1)+6\rho+11\right]\right)$$

$$f_5(\rho) = 0$$

. . . . . .

Alle $f_{2\nu+1}(\rho) \equiv 0$.

Den Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung (9): $\rho_1 = -2$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 3$ entsprechend nehmen wir versuchsweise drei partikuläre Lösungen an:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}^{-2}\sum_0^\infty{}_\nu\, \mathbf{g}_{1\cdot\nu}\mathbf{u}^\nu;\quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{u}\sum_0^\infty{}_\nu\, \mathbf{g}_{2\cdot\nu}\mathbf{u}^\nu;\quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{u}^3\sum_0^\infty{}_\nu\, \mathbf{g}_{3\cdot\nu}\mathbf{u}^\nu \tag{14}$$

und berechnen aus Gl. (12) mit Rücksicht auf (13) als Koeffizienten von x_1 die Werte:

g_{10} = willkürlich

$g_{11} = 0$

$$g_{12} = \frac{-f_2(-2)}{f_0(0)}\, g_{10}$$

g_{13} = willkürlich, da $f_0(0) = 0$ und außerdem $f_{2\nu+1}(\rho) = 0$

$$g_{14} = -\left(\frac{f_4(-2)}{f_0(2)} - \frac{f_2(0)\,f_2(-2)}{f_0(2)\,f_0(0)}\right) g_{10}$$

g_{15} = willkürlich, da $f_0(3) = 0$ und auch $f_2(1) = 0$

$$g_{16} = -\left(\frac{f_6(-2)}{f_0(4)} - \frac{f_4(0)\,f_2(-2)}{f_0(4)\,f_0(0)} - \frac{f_2(2)\,f_4(-2)}{f_0(4)\,f_0(2)} - \frac{f_2(2)\,f_2(0)\,f_2(-2)}{f_0(4)\,f_0(2)\,f_0(0)}\right) g_{10} \tag{15}$$

$$g_{17} = -\frac{f_4(1)}{f_0(5)}\, g_{13} - \frac{f_2(3)}{f_0(5)}\, g_{15}$$

$$g_{18} = -\left[\text{Funktion von } f_8(-2)\ldots. f_0(6)\right] g_{10}$$

$$g_{19} = -\left(\frac{f_6(1)}{f_0(7)} - \frac{f_4(1)}{f_0(7)}\frac{f_2(5)}{f_0(5)}\right) g_{13} - \left(\frac{f_4(3)}{f_0(7)} - \frac{f_2(3)}{f_0(7)}\frac{f_2(5)}{f_0(5)}\right) g_{15}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$g_{1\cdot 2^\nu} = -F_{2\nu}\, g_{10}$$

$$g_{1\cdot 2\nu+1} = -F^{(1)}_{2\nu+1}\, g_{13} - F^{(2)}_{2\nu+1}\, g_{15}$$

Die zweite partikuläre Lösung x_2 erhält die Koeffizienten:

$$g_{2\cdot 0} = \text{willkürlich}$$
$$g_{2\cdot 1} = 0$$
$$g_{22} = \text{willkürlich, da } f_0(3) = 0 \text{ und außerdem } f_2(1) = 0$$
$$g_{23} = 0$$
$$g_{24} = -\frac{f_4(1)}{f_0(5)} g_{20} - \frac{f_2(3)}{f_0(5)} g_{22} \qquad (16)$$
$$g_{25} = 0$$
$$g_{26} = -\left(\frac{f_6(1)}{f_0(7)} - \frac{f_4(1)\, f_2(5)}{f_0(7)\, f_0(5)}\right) g_{20} - \left(\frac{f_4(3)}{f_0(7)} - \frac{f_2(3)\, f_2(5)}{f_0(7)\, f_0(5)}\right) g_{22}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{2\cdot 2\nu-2} = -F^{(1)}_{2\nu+1} g_{2\cdot 0} - F^{(2)}_{2\nu+1} g_{22}$$
$$g_{2\cdot 2\nu-1} = 0.$$

In diesen Formeln haben $F^{(1)}_{2\nu+1}$ und $F^{(2)}_{2\nu+2}$ dieselben Werte wie oben in der Formel für $g_{1\cdot 2\nu+1}$.

Für die Koeffizienten von x_3 finden wir die Werte:

$$g_{30} = \text{willkürlich}$$
$$g_{31} = 0$$
$$g_{32} = -\frac{f_2(3)}{f_0(5)} g_{30}$$
$$g_{33} = 0$$
$$g_{34} = -\left(\frac{f_4(3)}{f_0(7)} - \frac{f_2(3)\, f_2(5)}{f_0(7)\, f_0(5)}\right) g_{30}$$
$$g_{35} = 0 \qquad (17)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{3\cdot 2\nu-4} = -F^{(2)}_{2\nu+1} g_{30}$$
$$g_{3\cdot 2\nu-3} = 0$$

$F^{(2)}_{2\nu+1}$ ist dieselbe Funktion wie oben.

Bilden wir nun mit drei willkürlichen Konstanten $c'_1\, c'_2\, c'_3$ den Ausdruck:

$$x = c'_1\, u^{-2} \sum_0^{\infty \nu} g_{1\cdot\nu} u^\nu + c'_2\, u \sum_0^{\infty \nu} g_{2\cdot\nu} u^\nu + c'_3\, u^3 \sum_0^{\infty \nu} g_{3\cdot\nu} u^\nu$$

so geht dieser infolge der Beziehungen (15), (16), (17) über in:

$$x = c_1 u^{-2} \sum_{0}^{\infty \nu} h_{1\cdot\nu} u^\nu + c_2 u \sum_{0}^{\infty \nu} h_{2\cdot\nu} u^\nu + c_3 u^3 \sum_{0}^{\infty \nu} h_{3\cdot\nu} u^\nu \tag{18}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
&c_1 = -g_{10} c'_1;\ c_2 = -g_{13} c'_1 - g_{20} c'_2;\ c_3 = -g_{15} c'_1 - g_{22} c'_2 - g_{30} c'_3 \\
&h_{10} = -1;\ h_{11} = 0 \ldots\ldots\ldots h_{1\cdot 2\nu} = F_{2\nu};\ h_{1\cdot 2\nu+1} = 0 \\
&h_{20} = -1;\ h_{21} = 0 \ldots\ldots\ldots h_{2\cdot 2\nu-2} = F^{(1)}_{2\nu+1};\ h_{2\cdot 2\nu-1} = 0 \\
&h_{30} = -1;\ h_{31} = 0 \ldots\ldots\ldots h_{3\cdot 2\nu-4} = F^{(2)}_{2\nu+1};\ h_{3\cdot 2\nu-3} = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Dieser Ausdruck (18) ist zu betrachten als die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (8) in der Umgebung des Punktes $u = 0$. Er setzt sich zusammen aus drei partikulären Lösungen, zwischen denen keine lineare Beziehung besteht, und drei willkürlichen Konstanten $c_1\, c_2\, c_3$.

Diese Betrachtungen galten der Untersuchung der singulären Punkte $\tau = 0$ und $\tau = iK'$. Da die Differentialgleichung (5) sich nicht ändert, wenn man τ durch $\tau + 2mK + 2m'iK'$ ($m, m' =$ ganze Zahlen) ersetzt, so gelten sie auch für alle modulo $2K, 2iK'$ homologen Punkte.

Wir finden also das Ergebnis:

Die Differentialgleichung (5) hat an den Stellen $\tau = 2mK + 2m'iK'$ außerwesentlich singuläre Stellen; wesentlich singulär sind die Stellen $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$; die Lösung besitzt hier einen Pol zweiter Ordnung. Sämtliche Lösungen verhalten sich bestimmt und sind sogar eindeutig.

Damit wir den Verlauf der Funktion x, wie sie durch die Differentialgleichung (5) definiert ist, besser übersehen können, ist es erstrebenswert, die unendlichen Reihen von Potenzen durch eine begrenzte Anzahl von höheren Funktionen zu ersetzen. Den Weg zu diesem Ziele zeigen uns Picards Sätze über lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten, deren Lösungen nur Pole besitzen und überall eindeutig sind: diese Gleichungen besitzen wenigstens eine, im allgemeinen n doppeltperiodische Funktionen zweiter Art, im Sinne Hermite's, als Lösung. Unsere Differentialgleichung (5) ist von dieser Art; sie muß als wenigstens durch eine doppeltperiodische Funktion zweiter Art, welche an der Stelle $u = 0$ (d. h. $\tau = iK'$) einen Pol zweiter Ordnung hat, gelöst werden.

Für die Darstellung dieser Funktion sind nun zwei Fälle zu unterscheiden: Es gehöre zur Periode $2K$ der Multiplikator μ, zur Periode $2iK'$ der Multiplikator μ'; je nachdem nun die Größen μ und μ' der Beziehung

$$K \ln \mu' - iK' \ln \mu = 0$$

genügen oder nicht genügen, besitzt die Funktion spezielle oder nicht spezielle Multiplikatoren und ist darzustellen durch die Formel:

$$x(u) = a_0 e^{\lambda_0 u} + A_0 \frac{\dot{H}(u)}{H(u)} e^{\lambda_0 u} + B_0 \frac{d}{du}\left[\frac{\dot{H}(u)}{H(u)} e^{\lambda_0 u}\right] \qquad \text{I. Fall.}$$

wobei die Konstanten $a_0 A_0 B_0 \lambda_0$ der Bedingung unterworfen sind:

$$A_0 + B_0 \lambda_0 = 0$$

(vgl. É. Picard, Traité d'Analyse, tome III [Paris 1908] p. 444)

oder

$$x(u) = A \frac{H(u+\alpha)}{H(u)} e^{\lambda u} + B \frac{d}{du}\left[\frac{H(u+\alpha)}{H(u)} e^{\lambda u}\right] \qquad \text{II. Fall.}$$

Welcher Fall ist bei uns gegeben?

I. Fall: Da in der Funktion (18) ein Glied u^{-1} nicht da ist, so muß $A_0 = 0$ sein. Es bleibt also:

$$B_0 \cdot \lambda_0 = 0 \text{ d. h. } B_0 = 0 \text{ oder } \lambda_0 = 0.$$

Ist $B_0 = 0$, so gäbe es eine Lösung $x = e^{\lambda_0 u}$. Man überzeugt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung sofort von ihrer Unmöglichkeit.

Ist $\lambda_0 = 0$, so geht der Ausdruck für x über in eine doppeltperiodische Funktion erster Art und zwar wäre

$$x = \text{const.} + \frac{1}{\mathrm{sn}^2(u)}$$

eine Lösung. Wir untersuchen diese Möglichkeit, indem wir in die ursprüngliche Differentialgleichung probeweise

$$x = c + \mathrm{sn}^2(\tau)$$

einsetzen. Nach Weghebung eines gemeinsamen Faktors $\mathrm{sn}(\tau)\,\mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)$ erhalten wir die Gleichung:

$$\mathrm{sn}^4(\tau)(24k^2 - 24k^2) + \mathrm{sn}^2(\tau)\left(-3(1+k^2) - 6k^2 c\right)$$
$$+ \left(-2 - c(1+k^2)\right) = 0$$

die identisch erfüllt sein müßte. Der Faktor von $\mathrm{sn}^4(\tau)$ verschwindet; jedoch die beiden folgenden Glieder werden für keine Wahl von c gleich Null. Darum kann die Lösung keine doppeltperiodische Funktion sein.

Damit ist der erste, der Mittag-Lefflersche Fall erledigt; unsere Funktion x besitzt nicht spezielle Multiplikatoren und ist nach der Methode Hermite's darzustellen.

Die Konstante A ist hier aus dem gleichen Grunde wie oben Null. Bei passend gewählten Konstanten c_1, c_2, c_3, α, λ (B ist nicht wesentlich) besteht also die Identität

$$c_1 u^{-2} \sum_0^\infty{}_\nu \, h_{1,\nu} u^\nu + c_2 u \sum_0^\infty{}_\nu \, h_{2,\nu} u^\nu + c_3 u^3 \sum_0^\infty{}_\nu \, h_{3,\nu} u^\nu = B \frac{d}{du}\left[\frac{H(u+\alpha)}{H(u)} e^{\lambda u}\right] \tag{20}$$

Die Konstanten werden dadurch bestimmt, daß man auch die rechte Seite in der Umgebung des Punktes $u = 0$ als Laurentsche Reihe entwickelt und eine hinreichende Anzahl von Glieder beider Seiten vergleicht.

Doch bevor wir das beginnen, wollen wir einige Formeln angeben, die wir im Laufe der Rechnung mehrmals anwenden müssen.

Es entsteht die bekannte Beziehung, die wir schon oben benutzten:

$$\dot{Z}(u) = \frac{d^2}{du^2} \ln H(u) = \frac{1}{3}(1 + k^2) + 2\frac{N_3}{N_1} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2(u)} \tag{21}$$

dabei bedeutet: $$N_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{du^k} H(u)\right]_{u=0}$$

Indem wir die Koeffizienten der Laurentschen Reihe auf beiden Seiten gleichsetzen finden wir:

$$\frac{N_5}{N_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{N_3}{N_1}\right)^2 - \frac{2}{3 \cdot 5!}(1 - k^2 + k^4) \tag{22}$$

Aus (21) folgt durch Differentation:

$$\ddot{Z}(u) = 2\frac{\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u)}{\mathrm{sn}^3(u)}$$

und daraus durch einige Umrechnungen:

$$\ddot{Z}^2(u) = -4\left(\dot{Z}(u)-\varepsilon_1\right)\left(\dot{Z}(u)-\varepsilon_2\right)\left(\dot{Z}(u)-\varepsilon_3\right)$$
$$= -4\left(\dot{Z}^3(u)+\gamma_1\dot{Z}^2(u)+\gamma_2\dot{Z}(u)+\gamma_3\right) \qquad (23)$$
$$\dddot{Z}(u) = -6\,\dot{Z}^2(u) - 4\,\gamma_1\,\dot{Z}(u) - 2\,\gamma_2$$

dabei ist: $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}(1+k^2) + 2\frac{N_3}{N_1}$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - 1$; $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 - k^2$

$$\gamma_1 = -(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) = -6\frac{N_3}{N_1}$$
$$\gamma_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1 = \frac{1}{3}\left[36\left(\frac{N_3}{N_1}\right)^2-(1-k^2+k^4)\right] \qquad (24)$$
$$\gamma_3 = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \frac{1}{27}\left[-6^3\left(\frac{N_3}{N_1}\right)^3+18\,(1-k^2+k^4)\frac{N_3}{N_1}\right.$$
$$\left.+(1+k^2)(2-5k^2+2k^4)\right]$$

Aus (21) folgen außerdem durch mehrmalige Differentation die Formeln:

$$\frac{\ddot{H}}{H}(u) = \dot{Z}(u)+Z^2(u)$$
$$\frac{\dddot{H}}{H}(u) = \ddot{Z}(u)+3\,\dot{Z}(u)\,Z(u)+Z^3(u) \qquad (25)$$
$$\frac{\ddddot{H}}{H}(u) = \dddot{Z}(u)+4\,\ddot{Z}(u)\,Z(u)+6\,\dot{Z}(u)\,Z^2(u)+3\,\dot{Z}^2(u)+Z^4(u)$$

Nach dieser Einschaltung fahren wir fort in der Behandlung der Gl. (20) und stellen zuerst die rechte Seite als Laurentsche Reihe (um $u=0$) dar:

$$\frac{H(u+\alpha)}{H(u)}e^{\lambda u} = \frac{\nu}{u}+\nu_0+\nu_1 u+\nu_2 u^2+\nu_3 u^3+\ldots\ldots$$
$$\nu = \frac{1}{N_1}H(\alpha)$$
$$\nu_0 = \frac{1}{N_1}\left[\lambda H(\alpha)+\dot{H}(\alpha)\right]$$
$$\nu_1 = \frac{1}{N_1}\left[\frac{\lambda^2}{2!}H(\alpha)+\lambda\dot{H}(\alpha)+\frac{\ddot{H}(\alpha)}{2!}-\frac{N_3}{N_1}H(\alpha)\right] \qquad (26)$$

$$\nu_2 = \frac{1}{N_1}\left[\frac{\lambda^3}{3!}H(\alpha) + \frac{\lambda^2}{2!}\dot{H}(\alpha) + \lambda\left(\frac{\ddot{H}(\alpha)}{2} - \frac{N_3}{N_1}H(\alpha)\right) + \frac{\dddot{H}(\alpha)}{3!} - \frac{N_3}{N_1}\dot{H}(\alpha)\right]$$

$$\nu_3 = \frac{1}{N_1}\left[\begin{array}{r} \frac{\lambda^4}{4!}H(\alpha) + \frac{\lambda^3}{3!}\dot{H}(\alpha) + \frac{\lambda^2}{2!}\left(\frac{\ddot{H}(\alpha)}{2!} - \frac{N_3}{N_1}H(\alpha)\right) \\ + \lambda\left(\frac{\dddot{H}(\alpha)}{3!} - \frac{N_3}{N_1}\dot{H}(\alpha)\right) \\ + \frac{\ddddot{H}(\alpha)}{4!} - \frac{N_5}{N_1}H(\alpha) - \frac{N_3}{N_1}\left(\frac{\ddot{H}(\alpha)}{2!} - \frac{N_3}{N_1}H(\alpha)\right) \end{array}\right]$$

. . . . . .

Die Gleichung (20) gibt dann die Beziehungen:

$$c_1 = B\nu$$
$$c_1 h_{12} = B\nu_1$$
$$c_2 = 2B\nu_2$$
$$c_1 h_{1\cdot 4} = 3B\nu_3$$

und die Größen α und λ sind bestimmt durch:

$$\mathbf{h}_{1\cdot 2} = \frac{\nu_1}{\nu}; \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{h}_{1\cdot 4} = \frac{\nu_3}{\nu} \tag{27}$$

oder mit Rücksicht auf (26):

$$\lambda^2 + 2\lambda\frac{\dot{H}}{H}(\alpha) = -\frac{\ddot{H}}{H}(\alpha) + 2h_{12} + 2\frac{N_3}{N_1}$$

d. h. $$\lambda = -\frac{\dot{H}}{H}(\alpha) \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{H}}{H}(\alpha)\right)^2 - \frac{\ddot{H}}{H}(\alpha) + 2\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)} \tag{28}$$

sowie

$$8h_{14} + 24\frac{N_5}{N_1} - 24\left(\frac{N_3}{N_1}\right)^2 = \left[\begin{array}{r} \lambda^4 + 4\lambda^3\frac{\dot{H}}{H}(\alpha) + 6\lambda^2\frac{\ddot{H}}{H}(\alpha) + 4\lambda\frac{\dddot{H}}{H}(\alpha) + \frac{\ddddot{H}}{H}(\alpha) \\ - 12\frac{N_3}{N_1}\left(\lambda^2 + 2\lambda\frac{\dot{H}}{H}(\alpha) + \frac{\ddot{H}}{H}(\alpha)\right) \end{array}\right] \tag{29}$$

dabei ist nach Gl. (14) und (19) zu setzen:

$$\mathbf{h_{12} = \frac{1}{6}(1 + k^2);\quad h_{14} = \frac{1}{5!}(7 - 22\,k^2 + k^4)} \tag{30}$$

Aus den Gl. (28) und (29) ergibt sich durch Elimination von λ eine transzendente Gleichung zur Bestimmung von α:

$$\sqrt{\left(\frac{\dot H}{H}(\alpha)\right)^2 - \frac{\ddot H}{H}(\alpha) + 2\left(h_{12} + \frac{N_2}{N_3}\right)} \times$$

$$\left[4\frac{\dddot H}{H}(\alpha) + 8\left(\frac{\dot H}{H}(\alpha)\right)^3 - 12\frac{\ddot H}{H}(\alpha)\frac{\dot H}{H}(\alpha)\right] =$$

$$\left[\begin{array}{l} 8\,h_{14} + 24\frac{N_5}{N_1} + 24\,h_{12}\frac{N_3}{N_1} - 4\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)^2 - \frac{\ddddot H}{H}(\alpha) \\ \qquad + 4\frac{\dddot H}{H}(\alpha)\frac{\dot H}{H}(\alpha) - 16\frac{\ddot H}{H}(\alpha)\left(\frac{\dot H}{H}(\alpha)\right)^2 \\ + 5\left(\frac{\ddot H}{H}(\alpha)\right)^2 + 8\left(\frac{\dot H}{H}(\alpha)\right)^4 - 8\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)\left(\frac{\ddot H}{H}(\alpha) - \left(\frac{\dot H}{H}(\alpha)\right)^2\right) \end{array}\right] \tag{31}$$

Sie verwandelt sich infolge der Beziehungen (25) in:

$$4\ddot Z(\alpha)\sqrt{2\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right) - \dot Z(\alpha)}$$

$$= \Lambda - \dddot Z(\alpha) + 2\dot Z^2(\alpha) - 8\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)\dot Z(\alpha)$$

wobei $$\Lambda = 8\,h_{14} + 24\frac{N_5}{N_1} + 24\,h_{12}\frac{N_3}{N_1} - 4\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)^2$$

Wenn man nun die Formeln (23) anwendet und quadriert, so verschwinden die Koeffizienten von $\dot Z^4(\alpha)$ und $\dot Z^3(\alpha)$ und es bleibt die Gleichung:

$$\dot Z^2(\alpha)\,C_0 + \dot Z(\alpha)\,C_1 + C_2 = 0 \tag{32}$$

dabei ist:

$$C_0 = -16\,\Lambda + 32\,\gamma_2 - 64\,\gamma_1\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)$$

$$C_1 = 64\,\gamma_3 - 8\,(\Lambda + 2\,\gamma_2)\left(\gamma_1 - 2\,h_{12} - 2\frac{N_3}{N_1}\right) - 128\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)\gamma_2$$

$$C_2 = (\Lambda + 2\,\gamma_2)^2 + 128\,\gamma_3\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)$$

Die Größen h_{12} und h_{14} haben hier noch beliebige Werte. Diese Gleichung bleibt also bestehen bei allen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten, deren Lösung eindeutig ist und nur an den Stellen $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$ Pole zweiter Ordnung mit verschwindendem Residuum besitzen und außerdem als doppeltperiodische Funktion zweiter Art nach Hermite darzustellen ist. In unserem speziellen Falle wenden wir jetzt die Beziehungen (22) (24) und (30) an; dadurch werden diese Koeffizienten C wesentlich vereinfacht, so daß sich schließlich ergibt:

$$C_0 = 2^7 h_{14} - \frac{2^{10}}{5!}(1 - k^2 + k^4)$$

$$C_1 = -4 C_0 \left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)$$

$$C_2 = +4 C_0 \left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)^2$$

So erhält die Gleichung (32) die endgültige Form:

$$\dot{Z}^2(\alpha) - 4\dot{Z}(\alpha)\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right) + 4\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right)^2 = 0$$

mit der Lösung:

$$\dot{Z}(\alpha) = 2\left(h_{12} + \frac{N_3}{N_1}\right) \tag{33}$$

Hiefür können wir wegen (21) und 30) schreiben:

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2(\alpha)} = 0$$

d. h. $$\alpha = \pm i K'$$

also $$\lambda = \mp \frac{\dot{H}}{H}(iK') = \pm \frac{i\pi}{2K} \tag{34}$$

Wir verwenden die Größen α und λ ihrer Bedeutung gemäß und erhalten, wie es scheint, für x zwei doppeltperiodische Funktionen zweiter Art:

$$\frac{d}{du}\left[\frac{H(u + iK')}{H(u)} e^{\frac{i\pi}{2K}u}\right] \text{ und } \frac{d}{du}\left[\frac{H(u - iK')}{H(u)} e^{\frac{-i\pi}{2K}u}\right].$$

Aber diese beiden Funktionen unterscheiden sich nur um den konstanten Faktor (— 1), sind also durch eine lineare Gleichung verbunden.

Als Ergebnis dieser Betrachtung finden wir:

Die Differentialgleichung (8) besitzt nur eine einzige doppeltperiodische Funktion zweiter Art als partikuläre Lösung, nämlich:

$$x_1(u) = \frac{d}{du}\left[\frac{H(u + iK')}{H(u)} e^{\frac{i\pi}{2K}u}\right] \tag{35}$$

d. h. die ursprüngliche Differentialgleichung (5) hat eine partikuläre Lösung:

$$\mathbf{x_1(\tau) = cn(\tau)\, dn(\tau);\quad \tau = at + b.} \tag{36}$$

Das Ziel dieser Untersuchung war, die allgemeine Lösung (18) in geschlossener Form zu erhalten. Wir haben es erst teilweise erreicht. Um es ganz zu erreichen, benützen wir die Gleichung (36) um die Ordnung von Gl. (5) zu erniedrigen.

Es sei

$$x = x_1 \int y\, d\tau \tag{37}$$

dann ist die Funktion y definiert durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{dy}{d\tau}\frac{1}{sn(\tau)\, cn(\tau)\, dn(\tau)} \times \tag{38}$$
$$\left(1 + 2(1 + k^2)\, sn^2(\tau) - 5\, k^2\, sn^4(\tau)\right) + y \cdot 8\, k^2\, sn^2(\tau)$$

y kann nur Pole zweiter Ordnung an den Nullstellen von x_1 (d. h. $\tau = K$; $\tau = K + iK'$) besitzen und muß eindeutig sein, da die Funktion x nur für $\tau = iK'$ unendlich wird und überall eindeutig ist. Die Untersuchung der Gl. (38) bestätigt dies auch; doch verzichten wir darauf Einzelheiten anzugeben. Die allgemeine Lösung ist eine doppeltperiodische Funktion erster Art:

$$y = c_1 \frac{1}{cn^2(\tau)} + c_2 \frac{1}{dn^2(\tau)}$$

Nach den Lehrsätzen über die Darstellung elliptischer Funktionen mit bekannten Polen bestehen die Beziehungen:

$$\frac{1}{cn^2(\tau)} = A_2 + B_2 \dot{Z}(\tau - K)$$

$$\frac{1}{dn^2(\tau)} = A_3 + B_3 \dot{Z}(\tau - K - iK')$$

wobei:

$$A_2 = \frac{1-2k^2}{3(1-k^2)} + \frac{2}{1-k^2}\frac{N_3}{N_1}$$

$$B_2 = \frac{-1}{(1-k^2)} \tag{39}$$

$$A_3 = \frac{2-k^2}{3(1-k^2)} - \frac{2}{1-k^2}\frac{N_3}{N_1}$$

$$B_3 = \frac{1}{1-k^2}$$

Wir erhalten so infolge der Beziehungen (37) zwei weitere Funktionen x:

$$\begin{aligned} x'_2 &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)\,[A_2\,\tau + B_2\,Z(\tau - K)] \\ x'_3 &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)\,[A_3\,\tau + B_3\,Z(\tau - K - i\,K')] \end{aligned} \tag{40}$$

und damit als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5):

$$\mathbf{x}(\tau) = c_1\,\mathbf{x}_1(\tau) + c_2\,\mathbf{x}'_2(\tau) + c_3\,\mathbf{x}'_3(\tau)$$

Schließlich leiten wir daraus drei partikuläre Lösungen ab, die wir als endgültige betrachten wollen.

Wir setzen einmal: $c_1 = 1;\ c_2 = 0;\ c_3 = 0$

dann $c_1 = 0;\ c_2 \cdot B_2 = 1;\ c_3 = 0$

schließlich: $c_1 = 0;\ c_2 = 0;\ c_3\,B_3 = 1$

und erhalten:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}}^{(2)}(\tau) &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau) \\ x_{\mathrm{II}}^{(2)}(\tau) &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)\,[\delta_2\,\tau + Z(\tau - K)] \\ x_{\mathrm{III}}^{(2)}(\tau) &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)\,[\delta_3 \cdot \tau + Z(\tau - K - i\,K')] \end{aligned} \tag{41}$$

wobei:

$$\delta_2 = \frac{2k^2-1}{3} - 2\frac{N_3}{N_1}$$

$$\delta_3 = \frac{2-k_2}{3} - 2\frac{N_3}{N_1}$$

Wir kehren zurück zu unserem Ausgangspunkt, zum Differentialsysteme (1). Nachdem wir die Funktion $x_{(2)}$ vollständig kennen, erhalten wir aus den Gl. (3) d. h. aus

$$x^{(1)} = -i\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\frac{1}{2\cdot(k^2-1)\,sn(\tau)}\times$$
$$\left[\ddot{x}^{(2)}\,cn(\tau)+\dot{x}^{(2)}\cdot 2\,sn(\tau)\,dn(\tau)+x^{(2)}\cdot cn(\tau)\left(1+k^2-2k^2sn^2(\tau)\right)\right]$$
$$x^{(3)} = -i\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\frac{-1}{2\cdot k(k^2-1)\,sn(\tau)}\times \qquad (42)$$
$$\left[\ddot{x}^{(2)}\cdot dn(\tau)+\dot{x}^{(2)}\cdot 2k^2\,sn(\tau)\,cn(\tau)+x^{(2)}\cdot dn(\tau)\left(1+k^2-2k^2sn^2(\tau)\right)\right]$$

durch einfache Umrechnung die zugehörigen Werte von $x_{(1)}$ und $x_{(3)}$.

Wir finden:

$$x_{I}^{(1)} = -i\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\,sn(\tau)\,dn(\tau)$$
$$x_{II}^{(1)} = -i\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\left\{sn(\tau)\,dn(\tau)\left[\delta_2\cdot\tau+Z(\tau-K)\right]+\frac{k'^2}{cn(\tau)}\right\}$$
$$x_{III}^{(1)} = -i\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\,sn(\tau)\,dn(\tau)\left[\delta_3\cdot\tau+Z(\tau-K-iK')\right] \qquad (43)$$
$$x_{I}^{(3)} = -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\,sn(\tau)\,cn(\tau)$$
$$x_{II}^{(3)} = -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\,sn(\tau)\,cn(\tau)\left[\delta_2\cdot\tau+Z(\tau-K)\right]$$
$$x_{III}^{(3)} = -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\left\{sn(\tau)\,cn(\tau)\left[\delta_3\cdot\tau+Z(\tau-K-iK')\right]-\frac{k'^2}{k^2}\frac{1}{dn(\tau)}\right\}$$

Dies sind die Funktionen, welche in Gleichung (20) des I. Teiles benutzt wurden. Die Funktionen $x_2^{(1)}$ und $x_3^{(3)}$ bleiben natürlich an den Stellen $\tau = K$ und $\tau = K + iK'$ endlich; man könnte dies äußerlich zu deutlicherem Ausdruck bringen, indem man Gebrauch machte von der Beziehung:

$$\frac{1}{sn(\tau)\,cn(\tau)\,dn(\tau)} = \frac{-k^2 i\pi}{k'^2\,2K}+Z(\tau)-\frac{1}{k'^2}Z(\tau-K)$$
$$+\frac{k^2}{k'^2}Z(\tau-K-iK') \qquad (44)$$

Wir wollen jedoch die Gleichungen (43) beibehalten.

Grenzfälle $k = 0$, $k = 1$.

All diese Funktionen haben Gültigkeit für den Modul $0 < k < 1$. Erreicht k die Null oder die Einheit, so gehen die elliptischen Funktionen in trigonometrische über. Wir wollen diese noch angeben.

Nach Gleichung (36) (37) (38) lassen sich die Funktionen $x_{(2)}$ in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}}^{(2)} &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau) \\ x'^{(2)}_{\mathrm{II}} &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau) \int \frac{\mathrm{sn}^2(\tau)}{\mathrm{cn}^2(\tau)\,\mathrm{dn}^2(\tau)}\,\mathrm{d}(\tau) \\ x'^{(2)}_{\mathrm{III}} &= \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau) \int \frac{1}{\mathrm{dn}^2(\tau)}\,\mathrm{d}(\tau) \end{aligned} \tag{45}$$

Für $\lim_{k=0} k = 0$ wird

$$\begin{aligned} \lim_{k=0} \mathrm{sn}(\tau) &= \sin(\tau) \\ \lim_{k=0} \mathrm{cn}(\tau) &= \cos(\tau) \\ \lim_{k=0} \mathrm{dn}(\tau) &= 1 \end{aligned} \tag{46}$$

Infolge der Beziehungen (45) und (46) erhalten wir also:

$$\begin{aligned} x'^{(2)}_{\mathrm{II}} &= \cos\tau\,(\mathrm{tg}(\tau) - \tau) \\ x'^{(2)}_{\mathrm{III}} &= \tau \cdot \cos\tau \end{aligned}$$

und bei passender Verbindung dieser Funktionen als Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (5) für $k = 0$:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}}^{(2)} &= \cos\tau \\ x_{\mathrm{II}}^{(2)} &= \sin\tau\,[= x'^{(2)}_{\mathrm{II}} + x'^{(2)}_{\mathrm{III}}] \\ x_{\mathrm{III}}^{(2)} &= \tau \cdot \cos\tau \end{aligned} \tag{47}$$

Die zugehörigen Werte von $x_{(1)}$ und $x_{(3)}$ ergeben sich aus Gl. (42); wenn wir aber die Funktionen $\lim_{k=0} x_{(2)}$ unmittelbar einsetzten, fänden wir $x^{(3)}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ für $k = 0$. Um die wirklichen Ausdrücke zu erhalten, setzen wir zunächst die Funktionen (45) ein und lassen dann k zur Null gehen. Wir finden so:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}}^{(1)} &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\sin\tau \\ x_{\mathrm{II}}^{(1)} &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\cos\tau\,[= x'^{(1)}_{\mathrm{II}} + x'^{(1)}_{\mathrm{III}}] \\ x_{\mathrm{III}}^{(1)} &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\,\tau \cdot \sin\tau \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad x_{\text{I}}^{(3)} = \lim_{k=0} -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\sin\tau\cos\tau$$

$$x_{\text{II}}^{(3)} = \lim_{k=0} \quad ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\left[\sin^2\tau + \frac{2-k^2}{k^2(k^2-1)}\right] \tag{47}$$

$$x_{\text{III}}^{(3)} = \lim_{k=0} -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\left[\tau\cdot\sin\tau\cdot\cos\tau - \frac{1}{k^2}\right]$$

Wir bemerken, daß die Funktion $x_{\text{I}}^{(3)}$ gleichzeitig mit k der Null zustrebt, während $x_{\text{II}}^{(3)}$ und $x_{\text{III}}^{(3)}$ ins unendliche wachsen, wenn nicht mit k auch μ_3 beliebig klein wird, so daß

$$\frac{\mu_3}{k^2} = \text{bestimmter Wert.}$$

[Die Beziehung zwischen μ_3 und k^2 im I. Teile zeigt, daß gerade das Verschwinden von μ_3 am Verschwinden von k^2 schuld sein kann.]

Von den beiden Perioden der elliptischen Funktionen wird im Falle $k=0$ die eine, $4K = 2\pi$; die andere $4iK' = \infty$ und entzieht sich damit der analytischen Verwendung.

Eine zweite Möglichkeit zur Ausartung unserer Funktionen gibt $k=1$. Es ist:

$$\lim_{k=1} \operatorname{sn}(\tau) = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{e^{\tau} + e^{-\tau}} = -i\operatorname{tg}(i\tau)$$

$$\lim_{k=1} \operatorname{cn}(\tau) = \frac{2}{e^{\tau} + e^{-\tau}} = \frac{1}{\cos(i\tau)} \tag{48}$$

$$\lim_{k=1} \operatorname{du}(\tau) = \frac{2}{e^{\tau} + e^{-\tau}} = \frac{1}{\cos(i\tau)}$$

Unter Benutzung der Gleichungen (45) finden wir die Funktionen:

$$x_{\text{I}}^{(2)} = \frac{1}{\cos^2(i\tau)}$$

$$x'^{(2)}_{\text{II}} = \frac{1}{32\cos^2(i\tau)}\left(-4\tau - i\sin(4i\tau)\right)$$

$$x'^{(2)}_{\text{III}} = \frac{1}{2\cos^2(i\tau)}\left(\tau - i\sin(i\tau)\cos(i\tau)\right)$$

Die Werte von $x^{(1)}$ und $x^{(3)}$, welche ihnen entsprechen, finden wir wieder aus (42) mit Rücksicht auf (45):

$$x_{I}^{(1)} = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\,\frac{\sin(i\tau)}{\cos^2(i\tau)}$$

$$x'^{(2)}_{II} = \lim_{k=1} -i\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\left[\frac{i\sin(i\tau)}{32\cos^2(i\tau)}\left(4\tau + i\sin(4i\tau)\right) + \frac{\cos(i\tau)}{k^2-1}\right]$$

$$x'^{(2)}_{III} = i\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\,\frac{i\sin(i\tau)}{2\cos^2(i\tau)}\left(\tau - i\sin(i\tau)\cos(i\tau)\right)$$

und für $x^{(3)}$ die Werte:

$$x_{I}^{(3)} = \lim_{k=1} -k\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\,\frac{\sin(i\tau)}{\cos^2(i\tau)}$$

$$x'^{(3)}_{II} = \lim_{k=1} -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\left[\frac{i\sin(i\tau)}{32\cos^2(i\tau)}\left(4\tau + i\sin(4i\tau)\right) + \frac{\cos(i\tau)}{k^2(k^2-1)}\right]$$

$$x_{III}^{(3)} = \lim_{k=1} -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\left[\frac{-i\sin(i\tau)}{2\cos^2(i\tau)}\left(\tau - i\sin(i\tau)\cos(i\tau)\right) - \frac{\cos(i\tau)}{k^2}\right]$$

Während k der Einheit sich nähert, wachsen $x'^{(2)}_{II}$ und $x'^{(3)}_{III}$ ins unendliche. Doch wird man sich dieser Funktionen bedienen, wenn k wenig von 1 verschieden ist; wir werden daher auch diesem System von Funktionen eine etwas vereinfachte Form geben indem wir bilden:

$$x_{II}^{(i)} = 4\,x'^{(i)}_{II} + x'^{(i)}_{III}$$

$$x_{III}^{(i)} = 4\,x'^{(i)}_{III}$$

So finden wir ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialsystemes (1) für $\lim k = 1$:

$$x_{I}^{(2)} = \frac{1}{\cos^2(i\tau)}$$

$$x_{II}^{(2)} = \frac{i}{2}\sin(2i\tau)$$

$$x_{III}^{(2)} = \frac{1}{\cos^2(i\tau)}\left(4\tau - i\sin(2i\tau)\right)$$

$$x_{I}^{(1)} = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\,\frac{\sin(i\tau)}{\cos^2(i\tau)}$$

$$x_{II}^{(1)} = \lim_{k=1} i\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\left[\frac{1}{2}\sin(i\tau)\sin 2(i\tau) - 4\frac{\cos(i\tau)}{k^2-1}\right]$$

$$x_{III}^{(1)} = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\,\frac{\sin(i\tau)}{\cos^2(i\tau)}\left(4\tau - i\sin(2i\tau)\right)$$

$$x_{\mathrm{I}}^{(3)} = \lim_{k=1} -k\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\,\frac{\sin(i\tau)}{\cos^2(i\tau)}$$

$$x_{\mathrm{II}}^{(3)} = \lim_{k=1} ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\left[-\frac{1}{2}\sin(i\tau)\cos(2i\tau) + \cos(i\tau)\,\frac{5-k^2}{k^2(k^2-1)}\right]$$

$$x_{\mathrm{III}}^{(3)} = \lim_{k=1} -ik\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\left[\frac{-i\sin(i\tau)}{\cos^2(i\tau)}\left(4\tau - i\sin(2i\tau)\right) - \frac{4\cdot\cos(i\tau)}{k^2}\right]$$

In dieser Untersuchung war uns daran gelegen, die Lösung des Differentialsystems (1) in allen Stadien ihrer Entwicklung zu verfolgen.

Die Umwandlung des Differentialsystemes von drei Gleichungen in eine einzige Differentialgleichung dritter Ordnung ist nicht unbedingt notwendig, aber sie ist vorteilhaft und immer ausführbar. Sie vereinfacht schon die Untersuchung über die Eindeutigkeit der Lösung. Auf dem eingeschlagenen Wege übersehen wir deutlich das Zustandekommen der eindeutigen allgemeinen Lösung. Bei der Darstellung dieser Lösung in geschlossener Form können wir die Untersuchung darüber ob der Hermitesche oder der Mittag-Lefflersche Fall der doppeltperiodischen Funktion zweiter Art gegeben ist, in einfacher Weise durchführen und erhalten schließlich die Entscheidung über die Anzahl der doppeltperiodischen Funktionen zweiter Art, welche der Differentialgleichung genügen, durch Lösung einer transzendenten Gleichung.

Zu erwähnen ist noch, daß die Koeffizienten der stellvertretenden Differentialgleichung dritter Ordnung doppeltperiodische Funktionen erster Art (mit den Perioden $2K$, $2iK'$) sind, während die Koeffizienten des ursprünglichen Differentialsystems doppeltperiodische Funktionen zweiter Art (mit den Perioden $2K$ und $2iK'$) im Sinne Hermites oder auch in diesem Falle doppeltperiodische Funktionen erster Art mit den Perioden $4K$ und $4iK'$ sind. Dieser Umstand bringt eine Vereinfachung der Untersuchung mit sich.

Lebenslauf.

Ich, Arthur Rauber, protestantischer Konfession, wurde geboren am 16. Juli 1888 in Thiersheim, Bez.-Amt Wunsiedel, als Sohn des damaligen Sekretariats-Assistenten am Amtsgerichte Thiersheim Konrad Rauber. Ich besuchte die Volksschule und das Progymnasium in Wunsiedel, dann das humanistische Gymnasium in Hof, das ich im Juli 1908 mit dem Reifezeugnis verließ. Im Oktober 1908 wurde ich als Studierender an der Universität München immatrikuliert. Ich widmete mich vorzugsweise mathematischen, physikalischen und astronomischen Studien. Über diese und daneben auch über andere Fächer hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren und Dozenten: Boehm, Doehlemann, Donle, Graetz, Großmann, v. Heigel, Koch, Laue, Lindemann, Muncker, Neumayer, Pfänder, Prandtl, Pringsheim, Ranke, Roentgen, Schneider, v. Seeliger, Specht, Sommerfeld, Voß, Wagner. Ihnen möchte ich an dieser Stelle danken.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Geheimrat Lindemann, sowohl für die Förderung in dieser Arbeit als auch für die Anregungen, die ich insbesondere in seinen Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen, Abelschen Funktionen und der linearen Differentialgleichungen, sowie über analytische Mechanik empfing.

Herrn Professor Sommerfeld danke ich für die Förderung meiner physikalischen Studien.